الحكومة المصرية ـــ نظارة المعارف العمومية

ادارة التعليم الزراعى والصناعى والتجارى

كتاب
الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

تاليف
شارلس سمث
المدرس بكلية سدنى سكس بكمبردج

وترجمة
محمد عبيد افندى
مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية

الجزء الثانى

راجعه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

وقد ترجم هذا الكتاب ونشر بتصريح من الخواجات مكملان وشركائه بلوندره ليمتد

(الطبعة الثانية)
بالمطبعة الاميرية بمصر
١٣٣٠ هـ ١٩١٢ م

الحكومة المصـــرية ــ نظارة المعـارف العمومية

ادارة التعليم الزراعى والصناعى والتجارى

كتاب
الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

تأليف

شـارلس سمث

المدرس بكلية سدنى سكس بكمبردج

وترجمــة

محمد عبيد افندى

مدرس الترجمة بمدرسة المعلمين الخديوية

الجـــزء الثـانى

راجعه ونشره قلم الترجمة العلمية ونشر الكتب بالادارة

وقد ترجم هـــذا الكتاب ونشر بتصريح من الخواجات مكملان وشركائه بلوندره ليمتد

(الطبعة الثـانية)

بالمطبعة الامـــيرية بمصـــر

١٣٣٠ هـ ١٩١٢ م

مباحث
الجـــزء الثـــانى
من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

الفصل السادس

الفصل السابع

الجـــزء الثـانى

من كتاب الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيدنا محمد سيد المرسلين وعلى آله وصحبه أجمعين

(الخواص الهندسية للقطاعات المخروطية)

الفصل السادس

المسقط العمودى

١٢٩ – تعريف – موقع العمود النازل من نقطة على مستو ثابت يسمى (المسقط العمودى) لهذه النقطة على هذا المستوى ويسمى المستوى الثابت مستوى المسقط واذا تحركت نقطة فرسمت منحنيا فان مسقطها العمودى على مستو معلوم يرسم منحنيا يقال له المسقط العمودى للمنحنى المعلوم

وعلى العموم اذا وصلت نقطة اختيارية مثل نقطة ع بنقطة ثابتة مثل نقطة ف ثم قطع المستقيم ف ع بمستو ثابت فى نقطة عَ يقال ان نقطة عَ هى مسقط ع على المستوى الثابت وكذلك تسمى نقطة ف مركز الاسقاط ويسمى المستوى الثابت مستوى المسقط

واذا فالمسقط العمودى ماهو الا حالة خصوصية فيها يكون مركز الاسقاط على بعد لانهائى وفى اتجاه عمودى على مستوى المسقط

١٣٠ – الخواص الأساسية للمساقط العمودية هى الآتية

(١) <u>مسقط الخط المستقيم هو خط مستقيم</u>

للبرهنة على ذلك نفرض أن المستقيم المعلوم يقطع مستوى المسقط فى نقطة ا ونفرض أن عَ هى مسقط أى نقطة مثل نقطة ع على المستقيم المعلوم فاذا أخذت أى نقطة أخرى على المستقيم المعلوم مثل نقطة ن وفرض أن

ں ںَ هو العمود النازل من ں على المستقيم ا عَ يكون ں ںَ موازيا للستقيم ع عَ واذا فهو أيضا عمود على مستوى المسقط واذا تكون نقطة ںَ هى مسقط نقطة ں . وحينئذ فمسقط كل نقطة من نقط المستقيم ا ع يلزم أن توجد على المستقيم ا عَ

(٢) مسقط المستقيمات المتوازية مستقيمات متوازية

لان مسقط نقطة تقاطع مستقيمين هو نقطة تقاطع مسقطيهما فاذا بعدت احدى هاتين النقطتين الى مالا نهاية بعدت الثانية أيضا الى مالا نهاية .

وحينئذ فاذا كان المستقيمان الأصليان متوازيين كان مستقيما المسقط متوازيين أيضا و بالعكس اذا كان المسقطان متوازيين كان المستقيمان الاصليان متوازيين

(٣) النسبة بين أجزاء المستقيم الواحد أوأجزاء المستقيمات المتوازية تساوى النسبة بين مساقطها

لانه اذا فرض أن اَ بَ ، حَ ءَ هما مسقطا المستقيمين المتوازيين ا ب ، ح ء على التناظر

ثم رسم من ا ، ح موازيان للمستقيمين اَ بَ ، حَ ءَ ليقطعا ب بَ ، ء ءَ على التناظر فى نقطتى و ، ے

يكون المثلثان و ا ب ، ے ح ء متشابهين ويكون

ا ب : ا و = ح ء : ح ے

∴ ا ب : ح ء = ا و : ح ے

= اَ بَ : حَ ءَ

لأن ا و = اَ بَ ، ح ے = حَ ءَ

(٤) عدد نقط تقاطع منحن بخط مستقيم (أو تقاطع منحن مستو بمنحنى مستو آخر) يساوى عدد نقط تقاطع مسقطيهما .

(٥) مسقط المماس لمنحن هو مماس لمسقط هذا المنحنى

لانه اذا انطبقت نقطتان من نقط تقاطع مستقيم بمنحن انطبقت كذلك نقطتا تقاطع مسقطيهما

و بالعكس اذا كان مسقطا خط مستقيم ومنحن متماسين فان المستقيم والمنحنى نفسهما يكونان متماسين

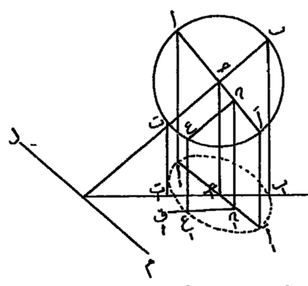
(٦) النسبة بين مساحة أى منحن فى مستو معلوم و بين مساحة مسقطه على مستو آخر معلوم تكون ثابتة

للبرهنة على ذلك نقسم سطح المنحنى المعلوم بعدد من المستطيلات حيثما اتفق وذلك برسم جملتين من المستقيمات المتباعدة عن بعضها بمسافات متساوية وتكون احدى الجملتين موازية لخط تقاطع المستوى المعلوم بمستوى المسقط والاخرى عمودية على هذا الخط فالاجزاء الموازية لخط التقاطع لاتتغير بالاسقاط ولكن الاجزاء العمودية عليه تنقص بنسبة ثابتة [هذه النسبة تساوى ١ : جتا هـ بفرض أن هـ هى الزاوية الواقعة بين المستويين] وحينئذ فكل مستطيل وكذلك أى عدد من المستطيلات تنقص بالاسقاط بنسبة ثابتة ولكن اذا قربت الخطوط المتوازية من بعضها قربا لانهائيا بحيث يصير كل مستطيل صغيرا صغرا لانهائيا فان مجموعها يكون فى النهاية مساويا للمساحة التى رسمت فيها هذه المستطيلات واذا فنسبة أى مساحة فى مستو معلوم الى مساحة مسقطها على مستو آخر معلوم هى ثابتة

١٣١ ـ مسقط الدائرة هو قطع ناقص

لنفرض ل م خط تقاطع مستوى الدائرة بمستوى المسقط

ولنفرض ا ح اَ قطر الدائرة الموازى للمستقيم ل م ، ب ح بَ هو القطر العمودى عليه ثم نفرض أن ا١ ح١ ا١َ ، ب١ ح١ ب١َ هما مسقطا ا ح اَ ، ب ح بَ على التناظر فحيث ان ا ح اَ مواز لمستوى المسقط فيكون ا١ ح١ ا١َ = ا ح اَ ويكون ب١ ح١ ب١َ عمودا على ا١ ح١ ا١َ



ثم نفرض ه ع أى احداثى رأسى للقطر ا ح اَ فى الدائرة ونفرض ان ه١ ع١ هو مسقط هذا القطر ونفرض أيضا ان ه١ ع١ يقطع الدائرة التى قطرها ا١ ا١َ فى نقطة ن١

فحيث ان الدائرتين ا ب اَ ، ا١ ن١ ا١َ متساويتان ، ح١ ه١ = ح ه فيلزم أن يكون ه١ ن١ مساويا للمستقيم ه ع

ومعلوم ان ه١ ع١ ، ح١ ب١ هما مسقطا المستقيمين المتوازيين ه ع ، ح ب على التناظر

∴ ه١ ع١ : ح١ ب١ = ه ع : ب ح

= ه١ ن١ : ح١ ا١

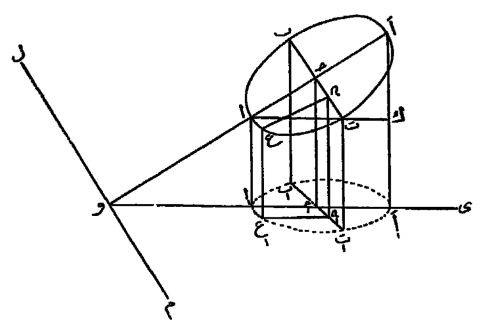
وحينئذ يكون ه١ ع١ : ه١ ن١ = ح١ ب١ : ح١ ا١

ومنه ينتج أن المحل الهندسى لنقطة ع هو قطع ناقص دائرته الاصلية هى الدائرة ا ب ا َ

١٣٢ ـ ويمكن أن يكون مسقط القطع الناقص دائرة

لنفرض أن ا ح اَ ، ب ح بَ هما المحور الأكبر والمحور الأصغر لقطع ناقص ثم نرسم مستويا مارّا بالمستقيم ا اَ وعمودا على ب ح بَ ونرسم فى هذا المستوى دائرة قطرها ا اَ ونرسم وتر الدائرة ا ك مساويا للمستقيم ب ح بَ ونرسم فى مستوى القطع الناقص أى مستقيم مثل ل م موازيا للمستقيم ب ح بَ وقاطعا للمحور الاكبر فى نقطة و فاذا كان و ى موازيا للوتر ا ك يكون مسقط القطع الناقص على المستوى ل م ى دائرة مساوية للدائرة الاصلية الصغرى للقطع الناقص المعلوم

لأنه بما أن و ى مواز للوتر ا ك يلزم أن يكون و ى فى المستوى اَ ا ك



وحيث ان ب ح بَ عمود على المستوى اَ و ى فيكون المستقيم الموازى له ل و م عمودا أيضا على هذا المستوى وحينئذ فالنقطتان ا ، اَ اللتان هما مسقطا ا ، اَ على التناظر على المستوى ل م ى واقعتان على المستقيم و ى

ثم نفرض أن ب١ ، بَ١ هما مسقطا ب ، بَ على التناظر وحيث انّ ب ح بَ مواز لمستوى المسقط فيكون

ب١ ح١ بَ١ = ب ح بَ

ويكون أيضا ب١ ح١ بَ١ عمودا على أ١ ح١ أَ١

ثم نفرض ء ع أى احداثى رأسى للقطر ب ح بَ فى هذا القطع الناقص ، ء١ ع١ مسقط ء ع

لحيث ان ء ع مواز للمستقيم ح ا فيكون ء١ ع١ موازيا للمستقيم ح١ أ١ ويكون

ء١ ع١ : ح١ أ١ = ء ع : ح ا

= ء ى : ب ح

بفرض ى هى نقطة تقاطع ء ع بالدائرة الاصلية الصغرى للقطع الناقص المذكور وحيث ان ح١ أ١ = ب ح بمقتضى الرسم فيكون ء١ ع١ = ء ى ولكن ح١ ء١ = ح ء ، ء١ ع١ عمود على ح١ ء١ فينتج أن المحل الهندسى لنقطة ع١ هو دائرة مساوية للدائرة الاصلية الصغرى للقطع الناقص

١٣٣ ـ اذا أسقط قطاع مخروطى ذو مركز اسقاطا عموديا وكان المسقط قطاعا مخروطيا آخر فمن حيث ان وكل وتر مارّ بمركز المنحنى الاول ينصفه هذا المركز وان النسبة بين أجزاء الخط المستقيم تساوى النسبة بين مساقطها فيكون مسقط مركز المنحنى الاول هو مركز المسقط

ثم انه حيث ان المماسات تنسقط على مماسات والخطوط المتوازية تنسقط على خطوط متوازية فينتج من ذلك أن أى قطرين متزاوجين فى المنحنى الاصلى ينسقطان على منحنيين متزاوجين فى المسقط

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن كل مسقط عمودى لقطاع مخروطى هو قطاع مخروطى من نوعه وان مركز هذا المسقط هو مسقط مركز المنحنى الاصلى [يبنى البرهان على بند ٤٥ أو بند ٧٩ أو بند ١٠١]

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن أى مستقيمين متقاطعين يمكن اسقاطهما اسقاطا عموديا على مستقيمين متعامدين

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أن أى قطع زائد يمكن اسقاطه اسقاطا عموديا على قطع زائد قائم

(مسألة ٤) المطلوب البرهنة على أن النسبة بين مساحة القطع الناقص ومساحة دائرته الاصلية تساوى النسبة بين محوره الاصغر ومحوره الاكبر

١٣٤ - يمكن البرهنة على كثير من خواص القطع الناقص بواسطة اسقاطه على دائرة وتسمى هذه الخواص بالخواص المسقطية

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمنتصفات الأوتار المتوازية فى قطع ناقص هو خط مستقيم

لذلك نسقط القطع الناقص على دائرة

فتكون الأوتار المتوازية منسقطة على أوتار متوازية أيضا وتكون منتصفات الأوتار الاصلية منسقطة على منتصفات مساقط الأوتار واذا فعلينا أن نبرهن على أن المحل الهندسى لمنتصفات الأوتار المتوازية فى دائرة هو خط مستقيم وذلك ثابت بمقتضى الهندسة الاصلية

(مسئلة ٢) اذا فرض أن المماسين المرسومين من نهايتى الوتر ى ى َ فى قطع ناقص مركزه حـ يتقاطعان فى نقطة ط وأن حـ ط يقطع ى ى َ فى نقطة ف ويقطع القطع الناقص فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن حـ ف . حـ ط = حـ ع ٢

للبرهنة على ذلك نسقط القطع الناقص على دائرة فيكون مسقط مركز القطع الناقص هو مركز هذه الدائرة لأن كل وتر من أوتار الدائرة المار بمسقط مركز القطع الناقص تنصفه هذه النقطة

ثم نفرض أن ح١ ، ط١ ، ن١ ، ن١′ ، ف١ هي مساقط ح ، ط ، ن ، ن′ ، ف على التناظر فحيث ان مسقط مماس أى منحن هو مماس مسقط هذا المنحنى فيكون ط١ن١ ، ط١ن١′ مماسين للدائرة

وكذلك حيث ان النسبة بين أجزاء الخط المستقيم تساوى النسبة بين مساقطها فيكون

حف : حع = ح١ف١ : ح١ع١

و حع : حط = ح١ع١ : ح١ط١

ولكن حيث أن المثلثين ح١ف١ن١ ، ح١ن١ط١ متشابهان فيكون

ح١ف١ : ح١ن١ = ح١ن١ : ح١ط١

∴ ح١ف١ : ح١ع١ = ح١ع١ : ح١ط١

وحينئذ يكون حف : حع = حع : حط

مسائل

(١) اذا فرضت ا ، ع ، ب ثلاث نقط على منحنى قطع ناقص مركزه ح ورسم من نقطة ع موازيان للماسين فى نقطتى ا ، ب فقطعا ح ب ، ح ا فى نقطتى ن ، ر على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ن ر مواز للماس فى نقطة ع

(٢) اذا رسم المستقيمان ط ع ، ط ن مماسين لقطع ناقص ورسم أى وتر مثل الوتر ط ر ب وفرضت نقطة ف منتصف جزء الوتر الواقع فى المنحنى وأن ن ف يقطع المنحنى فى نقطة ع′ فالمطلوب البرهنة على أن ع ع′ مواز للمستقيم ب ط

(٣) اذا فرض قطعان ناقصان متشابهان وفى وضعين متشابهين ورسم مستقيمان متوازيان بحيث يمس كل منهما منحنيا فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم الواصل بين نقطتى التماس يمر باحدى نقطتين ثابتتين

(٤) اذا فرض أن $ع ع'$ ، $د د'$ وكذلك $ع_1 ع'_1$ ، $د_1 د'_1$ زوجان من أقطار متزاوجة فى قطع ناقص فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمين $ع ع_1$ ، $ع' ع'_1$ موازيان للمستقيمين $د' د_1$ ، $د' د'_1$ على التناظر

(٥) اذا فرض انه من نقطتين ثابتين على منحنى قطع ناقص مثل نقطتى ا ، ب رسم الوتران المتوازيان ا ع ، ب ن فالمطلوب البرهنة على أن ع ن يمس أيضا قطعا ناقصا مشابها للاول وفى وضع مشابه لوضع الأول

(٦) اذا فرض أن ا ، ب أى نقطتين وكان الوتر القطبى لنقطة ا بالنسبة لقطع ناقص معلوم يمر بنقطة ب ثم رسم من نقطة د التى هى منتصف ا ب مماس للقطع الناقص وليكن د ع وفرض أن حـ ن ، حـ م هما نصفا القطرين الموازيين للمستقيمين ا ب ، د ع فالمطلوب البرهنة على أن

$$ا ب : حـ ن = ٢ د ع : حـ م$$

الفصـــــل السابع
النسب التعاكسية والتضامن

الخواص التعاكسـية للقطاعات المخروطيـة

١٣٥ ـ كل جملة من النقط على خط مستقيم تسمى صفـــا وإذا مرت جملة مستقيات بنقطة واحدة فانها تسمى حـــزمة ويسمى كل مستقيم من هذه المستقيات شـــعاعا

اذا فرضت أربع نقط على مستقيم مثل ع ، ں ، ر ، س فالنسـبة ع ں/ر ں : ع س/ر س أو ع ں . ر س : ع س . ر ں (مع ملاحظة اتجاهات المستقيات كما تقدّم فى بند ٩٩) تسمى النسبة التعاكسية للصف ع ، ں ، ر ، س ويرمز لهـا هكذا {ع ں ر س}

١٣٦ ـ اذا قسم خط مستقيم مثل المستقيم ع ر فى الداخل بنقطة مثل ں وفى الخارج بنقطـة مثل س بنسـبة واحدة يقـال انه قسم بنســبة توافقيــة

ويقـال للنقطتين ں ، س انهما متزاوجتان تزاوجا توافقيا بالنسـبة للنقطتين ع ، ر

وحينئذ فالنقط ع ، ں ، ر ، س تكون صـفا توافقيا متى كان

ع ں : ں ر = ع س : ر س

أو ع ں : ـــ ر ں = ع س : ر س

واذا فالنسبة التعاكسية لصف توافق تساوى ـــ ١

اذا كان {ع ں ر س} = ـــ ١ يكون ع ں . ر س = ـــ ر ں . ع س

∴ ع ں : ع س = ع ر ـــ ع ں : ع س ـــ ع ر

واذا فيكون ع ں ، ع ر ، ع س مكوّنة لمتوالية توافقيه

وإذا فرض أن {ع ق ر س} = −١ أو ع ق . ر س = ع س . ق ر
وكانت ف هي منتصف ع ر يكون

(ع ف + ف ق) (ف س − ع ف) = (ع ف + ف س) (ع ف − ف ق)

ومنه يحدث ف ق . ف س = ف ع^٢ = ف ر^٢

وكذلك إذا فرض أن و منتصف ق س يكون

و ر . و ع = و س^٢ = و ق^٢

١٣٧ ـ يقتضي تعريف النسبة التعاكسية لاربع نقط على خط مستقيم أن تؤخذ النقط بترتيب مخصوص ومع ذلك فيستنتج من التعريف مباشرة أن

{ع ق ر س} = {ق ع س ر} = {ر س ع ق} = {س ر ق ع}

وبناء عليه فالنسبة التعاكسية لاربع نقط لاتتغير اذا تبادلت أي نقطتين في الوضع وتبادلت كذلك النقطتان الاخريان

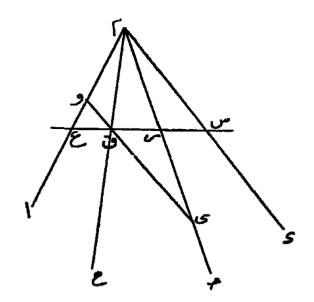
وبمقتضى الارتباط

ع ق . ر س + ع ر . س ق + ع س . ق ر = ٠

الذي هو صحيح لجميع أوضاع ع ، ق ، ر ، س على مستقيم يمكن أن يرى أنه اذا كان {ع ق ر س} = ص تكون المقادير المختلفة للنسب التعاكسية المتحصلة من أخذ النقط الأربعة بكل ترتيب ممكن هي

ص ، $\frac{١}{ص}$ ، ١ − ص ، $\frac{١}{١ − ص}$ ، $\frac{ص}{ص − ١}$ ، $\frac{ص − ١}{ص}$

١٣٨ ـ اذا قطع مستقيم حزمة مكونة من أربعة مستقيمات مثل م ا ، م ب ، م حـ ، م ء في النقط ع ، ق ، ر ، س على التناظر يكون {ع ق ر س} ثابتا



للبرهنة على ذلك نرسم من نقطة ق المستقيم و ق ى موازيا للمستقيم م ء فيقطع م ا ، م ح فى و ، ى على التناظر

فيكون ع ق : ع س = و ق : م س

و ر س : ر ق = م س : ى ق

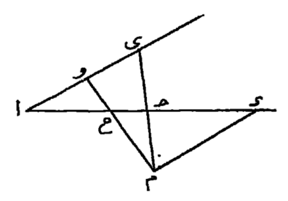
∴ ع ق . ر س : ع س . ر ق = و ق : ى ق

وواضح أن و ق : ى ق ثابت لجميع أوضاع ق واذا {ع ق ر س} ثابت لجميع أوضاع وجميع اتجاهات المستقيم القاطع

تعريف ـ النسبة التعاكسية لحزمة ذات أربعة مستقيمات مثل م ا ، م ب ، م ح ، م ء هى النسبة التعاكسية للصف المكون من قطع المستقيمات بأى قاطع ويرمز لها هكذا م {ا ب ح ء}

(مسألة ١) اذا فرضت ثلاث نقط على خط مستقيم فالمطلوب ايجاد نقطة رابعة عليه بحيث يكون الصف المكون ذا نسبة تعاكسية معلومة

لنفرض أن ا ، ح ، ح هى النقط الثلاث المفروضه ونرسم من نقطة ا مستقيما حيثما اتفق مثل ا و ى ونفرض عليه نقطتى و ، ى بحيث تكون ا و : ى و مساوية للنسبه التعاكسية المعلومة

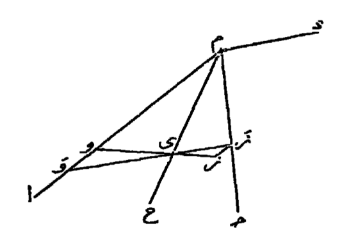


ثم نفرض أن و ح ، ى حـ يتقاطعان فى نقطة م ونرسم من م موازيا للمستقيم ا و ى فيقطع ا ح حـ فى ء فتكون ء هى النقطة المطلوبة

لان {ا ح حـ ء} = {ا و ى ∞} = ا و : ى و

(مسألة ٢) ـ اذا علمت ثلاثة مستقيمات متقاطعة فى نقطة واحدة فالمطلوب ايجاد مستقيم رابع يمر بهذه النقطة بحيث تكون الحزمة المكونة ذات نسبة تعاكسية معلومة

لنفرض أن م ا ، م ح ، م حـ هى المستقيمات المعلومة . ثم نرسم مستقيما يقطع م ا فى نقطة و ويقطع م ح فى نقطة ى ونفرض نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة ز بحيث تكون و ى : ز ى مساوية للنسبة التعاكسية المعلومة . ثم نرسم من نقطة ز موازيا للمستقيم م ا فيقطع م حـ فى زَ ونفرض أن زَ ى يقطع م ا فى نقطة وَ



فيكون المستقيم م ى الموازى للمستقيم وَ نَ هو المستقيم المعلوم
لان م {ا ح ح ى} = {وَ ى نَ ∞} = وَ ى : نَ ى = و ى : ن ى

(مسألة ٣) ــ اذا فرض أن صفين ذوى نسبة تعاكسية واحدة وواقعين على مستقيمين مختلفين لهما نقطة مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمات الواصلة بين النقط الاخرى المشتركة بين الصفين تتقاطع فى نقطة واحدة

لانه اذا فرض أن {ا ح ح ى} = {ا حَ حَ ىَ} وكان ح حَ ، ح حَ متقاطعين فى نقطة م وكان م ى قاطعا ا حَ حَ ىَ فى نقطة و
يكون {ا حَ حَ و} = {ا ح ح ى} = {ا حَ حَ ىَ}
ومنه ينتج أن و منطبقة على نقطة ىَ

(مسألة ٤) ــ اذا فرض أن حزمتين ذوى نسبة تعاكسية واحدة ومارتين بنقطتين مختلفتين فيهما شعاع مشترك فالمطلوب البرهنة على أن نقط تقاطع الاشعة الاخرى المتناظرة واقعة على خط مستقيم

اذا فرض أن م {ا ح ح ى} = مَ {ا حَ حَ ىَ} وكان و ، ى ، ن هى النقط الثلاث التى تتقاطع فيها الاشعة الاخرى المتناظرة يكون و ى اما مارا بنقطة ن أو غير مار فاذا كان غير مار بها نفرض أنه يقطع م مَ فى ع و يقطع م ى ، مَ ىَ على التناظر فى نقطتى ك ، كَ فيكون م {ا ح ح ى} = {ع و ى ك} ، مَ {ا حَ حَ ىَ} = {ع و ى كَ} واذا يكون {ع و ى ك} = {ع و ى كَ}
وهذا مستحيل الا اذا انطبقت ك ، كَ على نقطة ن

(مسألة ٥) ــ المطلوب البرهنة على أن كل قطرين من أقطار الشكل الرباعى الثلاثة يقسمان القطر الثالث بنسبة توافقية

لنفرض أن ں ا ح ، ں ى ح ، ع ى ا ، ع ح ح هى أضلاع الشكل الرباعى ومعلوم أن المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع أى ضلعين من هذه

الاضلاع بنقطة تقاطع الضلعين الآخرين يسمى قطرا للشكل الرباعى المذكور واذا فتوجد ثلاثة أقطار وهى ع ق ، ا ح ، ح ى كما فى الشكل الآتى وعلينا أن نثبت أن

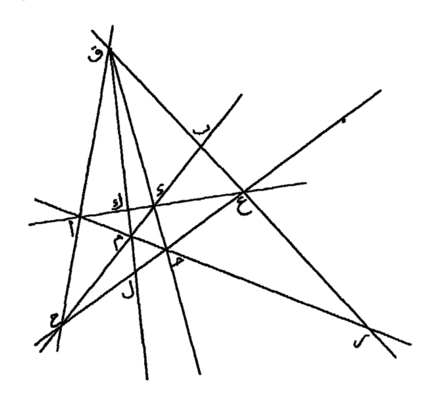
{ا م ح ر} = {ح م ى ب} = {ق ب ع ر} = — ١

ثم نفرض أن ق م يقطع ا ى فى ك ويقطع ح ح فى ل

فيكون {ا م ح ر} = ق {ا م ح ر} = {ا ك ى ع}

= م {ا ك ى ع} = {ح ل ح ع}

= ق {ح ل ح ع} = {ح م ا ر}



وحيث ان {ا م ح ر} = {ح م ا ر} فيكون

ا م . ح ر / ا ر . ح م = ح م . ا ر / ح ر . ا م ∴ {ا م ح ر} = ± ١

ويجب أن نأخذ الجواب المقرون بعلامة السلب لأنه واضح أن اثنين من الاشعة ينطبقان اذا كانت النسبة التعاكسية للحزمة تساوى + ١

واذا فالقطر ا ح منقسم بنسبة توافقية ويمكن بمثل هذه الطريقة البرهنة على أن القطرين الآخرين منقسمان بنسبة توافقية أيضا

[ولو أردت برهانا آخر فراجع هندسة اقليدس لسميث وبريانت صحيفة ٣٩٣]

التضامن

١٣٩ – تعريف – اذا فرضت جملة أزواج من نقط على خط مستقيم مثل النقط ا و اَ ، ب و بَ ، ج و جَ ... الخ بحيث تكون ابعادها عن نقطة ثابتة على هذا المستقيم مثل نقطة م مكوّنة للارتباط الآتى وهو

م ا . م اَ = م ب . م بَ = م ح . م حَ = ...

فان هذه النقط تكوّن صفا متضامنا وتسمى نقطة م مركز التضامن

وكل نقطتين متناظرتين مثل ا و اَ يقال لهما متزاوجتان وتكون النقطة المزاوجة للمركز على بعد لانهائى

واذا كانت كل نقطة والنقطة المزاوجة لها فى جهة واحدة بالنسبة للمركز فانه يوجد نقطتان أخريان مثل نقطتى ل١ ، ل٢ فى جهتين متقابلتين من المركز ويكون وضعهما موفيا للتساويات الآتية م ل١^٢ = م ل٢^٢ = م ا . م اَ ويقال للنقطتين ل١ ، ل٢ نقطتان مضاعفتان أو بورتان

واذا كانت النقطتان المتزاوجتان فى جهتين متقابلتين بالنسبة للمركز تكون النقطتان المضاعفتان تخيليتين

١٤٠ – يتعين الصف (المتضامن) تماما اذا علم منه زوجان من النقط المتزاوجة

لاننا اذا رسمنا أى دائرتين مارتين بالنقط ا و اَ ، ب و بَ على التناظر فان المحور الاصلى للدائرتين يقطع المستقيم ا اَ ب بَ فى نقطه مثل نقطة م بحيث يكون م ا . م اَ = م ب . م بَ نقطة واحدة موفية لهذا الشرط

١٤١ – اذا كانت جملة نقط مكوّنة لصف (متضامن) فان النسبة التعاكسية لاى أربع نقط تساوى النسبة التعاكسية للنقط الاربع المزاوجة لها

للبرهنـــة على ذلك نفرض أنـ الازواج من النقط المـتزاوجة هى

ا و اَ ، ب و بَ ، حـ و حـَ ، ى و ىَ

ثم نفرض أنـ المحور الاصلى للدائرتين المرسومتين على ا اَ ، ب بَ باعتبارهما قطرين يقطع المســتقيم ا ب حـ ى فى نقطة م فتكون نقطة م هى مركز التضامن

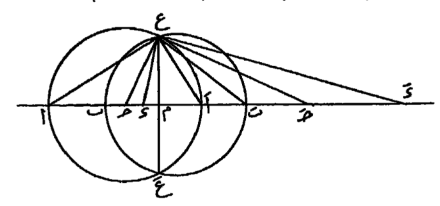
وإذا تقاطعت الدائرتان المذكورتان فى نقطتين حقيقيتين مثل ع ، عَ تكون الزاويتان ا ع اَ ، ب ع بَ قائمتين وتكون كذلك الزاوية ا م ع قائمة وبناء عليه يكون

ا م . م اَ = م ع٢ = ب ع . ع بَ = حـ م . م حـَ = الخ

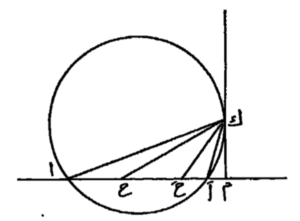
وإذا تكون الزاويتان حـ م حـَ ، ى م ىَ قائمتين أيضا

وحينئذ فالزاويتان ا ع ب ، اَ ع بَ متساويتان وكذلك الزاويتـان ب ع حـ ، بَ ع حـَ متساويتان والزاويتان حـ ع ى ، حـَ ع ىَ متساويتان أيضا وإذا وصـلنا نقطة ع بالنقط الاربـع ا ، ب ، حـ ، ى تكون زوايا هذه الحزمة مساوية لزوايا الحزمة المكوّنة من وصل نقطة ع بالنقط الاربع اَ ، بَ ، حـَ ، ىَ ومنه ينتج أن

ع {ا ب حـ ى} = ع {اَ بَ حـَ ىَ}



وإذا فرض أن الدائرتين اللتين قطراهما ا اَ ، ب بَ لا يتقاطعان في نقطتين حقيقيتين اى عند ما تكون النقطتان المتزاوجتان فى جهة واحدة بالنسبة للمركز م نرسم دائرة مارة بنقطتى ا ، اَ بحيث تمس العمود المقام من نقطة م على ا اَ ونفرض أن ك هى نقطة التماس



وحيث ان م ك٢ = م ا . م اَ = م ع . م عَ فيستنتج من ذلك أن م ك يمس فى نقطة ك دائرة مارة بنقطتى ع ، عَ ويكون الامر كذلك بالنسبة للازواج الاخرى من النقط

وبناء عليه فالزاويتان م ك اَ ، م ا ك متساويتان وكذلك الزاويتان م ك عَ ، م ع ك متساويتان وإذا فالزاويتان اَ ك عَ ، ا ك ع متساويتان

وإذا فزوايا الحزمة المكونة من وصل نقطة ك بالنقط ا ، ع ، ح ، ى مساوية لزوايا الحزمة المكونة من وصل نقطة ك بالنقط اَ ، عَ ، حَ ، ىَ وإذا فالنسبتان التعاكسيتان للحزمتين متساويتان

ويجب أن نلاحظ أنه قد ثبت ضمنا أنه اذا كان زوجان من النقط المتزاوجة فى صف متضامن يقابلان زاوية قائمة رأسها أى نقطة ما فان كل زوج آخر من هذه النقط يقابل زاوية قائمة رأسها هذه النقطة

نتيجة ١ – يمكن الحصول مما تقدّم على شرط لازم وكاف لان تكون ثلاثة أزواج من نقط مكوّنة لصف متضامن وهو

{ ا ب حـ اَ } = { اَ بَ حَ ا } .

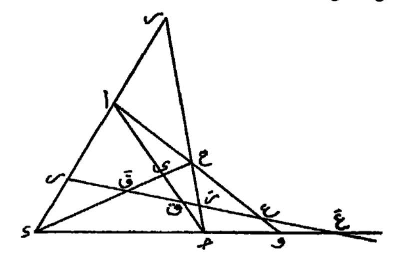
نتيجة ٢ – أى زوج من النقط المتزاوجة فى صف متضامن يكوّن مع النقطتين المضاعفتين صفا توافقيا

لأنه اذا كانت النقط المضاعفة ك١ ، ك٢ والنقط ا ، اَ زوجين من النقط المتزاوجة يكون

{ ك١ ا ك٢ اَ } = { ك١ اَ ك٢ ا }

(مسئلة ١) المطلوب البرهنة على أنه فى كل شكل رباعى أى مستقيم يقطع الثلاثة الازواج من الاضلاع المتقابلة فى ثلاثة أزواج من نقط مكوّنة لصف متضامن

لنفرض ا ، ح ، حـ ، د رؤوس الشكل الرباعى المفروض وأن ا ح ، حـ د يتقابلان فى نقطة و وأن ا حـ ، ح د يتقابلان فى نقطة ى ، ا د ، ح حـ يتقابلان فى نقطة ر ثم نفرض أن مستقيما يقطع هذه الازواج من الاضلاع المتقابلة فى ع ، عَ وفى ف ، فَ وفى ر ، رَ



فيكون {ع ف م عَ} = ا {ع ف م عَ}

= {و ح د عَ}

= ح {و ح د عَ}

= {ع م فَ عَ} = {عَ فَ مَ ع}

(مسئلة ٢) المطلوب البرهنة على أن الازواج الثلاثة من المستقيمات الموسومة من نقطة ما الى نهايات الاقطار الثلاثة لاى شكل رباعى تكون متضامنة

١٤٢ – تعريف – اذا وصلت جملة أزواج من نقط متضامنة بنقطة ما مثل نقطة م فانه ينشأ من ذلك حزمة تسمى حزمة متضامنة لنفرض ا و اَ ، ب و بَ ، ح و حَ .. الخ أزواجا من نقط متضامنــة ونفرض أن الحزمة المكونة من وصــل هــذه النقط بنقطة م يقطعها أى قاطع آخر فى الازواج الآتية من النقط ا١ و اَ١ ، ب١ و بَ١ ، ح١ و حَ١ .. الخ

فحيث ان ا و اَ ، ب و بَ ... الخ هى أزواج من نقط متضامنة فتحدث الارتباطات الآتية

{ا ب ح اَ} = {اَ بَ حَ ا}

لكن {ا ب ح اَ} = {ا١ ب١ ح١ اَ١}

، {اَ بَ حَ ا} = {اَ١ بَ١ حَ١ ا١}

ومن ذلك ينتج {ا١ ب١ ح١ اَ١} = {اَ١ بَ١ حَ١ ا١} .. الخ

ومنه ينتج أن ا١ و اَ١ ، ب١ و بَ١ ، ح١ و حَ١ .. الخ هى أزواج من نقط متضامنة

فيتضح اذا أنه اذا قطع مستقيم حزمة فى أزواج من نقط متضامنة فان هــذه الحزمة يقطعها أى مســتقيم آخر فى أزواج من نقط متضامنة

نتيجة ١ ـ الازواج من المستقيمات المتعامدة والمارة بنقطة واحدة يقطعها خط مستقيم فى صف تضامن

نتيجة ٢ ـ الازواج من الاقطار المتزاوجة فى قطاع مخروطى هى متضامنة

لأننا نعلم أن الازواج من الاقطار المتزاوجة فى قطاع مخروطى يقطعها أى مماس فى أزواج من نقط متضامنة ونقطة تماس هذا المماس هى مركز التضامن [بمقتضى بند ١٠٥] واذا فالازواج من الاقطار المتزاوجة يقطعها أى مستقيم فى أزواج من النقط المتضامنة والخطان التقربيان لهذا القطاع هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن

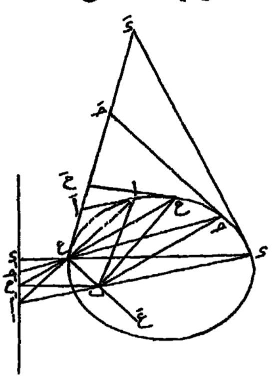
الخواص التعاكسية للقطاعات المخروطية

١٤٣ ـ النسبة التعاكسية للحزمة المكونة من وصل أى نقطة من نقط منحنى قطاع مخروطى بأربع نقط ثابتة هى ثابتة ومساوية للنسبة العكسية للصف المكون من قطع مماسات المنحنى فى هذه النقط بأى مماس آخر

لنفرض ا ، ح ، ﺤ ، ء أربع نقط ثابتة على منحنى قطاع مخروطى بورته ب

ولنفرض ع أى نقطة أخرى على المنحنى ثم نفرض أن الخطوط ع ا ، ع ح ، ع ﺤ ، ع ء تقطع الدليل المناظر للبورة ب فى ا ، ح ، ﺤ ، ء على التناظر ونمد ع ب على استقامته الى ع ومن المعلوم ان ب ا منصف للزاوية ع ب ا أو الزاوية ا ب ع بحسب ما اذا كانت ع ، ا على فرعين متقابلين من المنحنى أو على فرع واحد منه

فمن ذلك ينتج أن الزاوية ا١ ب ح١ ثابتة لجميع أوضاع نقطة ع لانهـا اما مساوية أو متممة لنصف الزاوية ا ب ح على حسب ما اذا كانت ا ، ح



على فرع واحد أو على فرعين متقابلين من المنحنى وحيث ان الزوايا ا١ ب ح١ ، ح١ ب هـ١ ، هـ١ ب د١ ثابتة فينتج أن ب {ا١ ح١ هـ١ د١} ثابت

ولكن ب {ا١ ح١ هـ١ د١} = {ا١ ح١ هـ١ د١}

= ع {ا١ ح١ هـ١ د١}

= ع {ا ح هـ د}

فيتضح اذاأن ا ، ح ، هـ ، د تقابل حزمة ذات نسبة تعاكسية ثابتة رأسها أى نقطة من نقط المنحنى

ثم نفـرض ان المماس فى نقطة ع يقطع المماسات المرسومة من ا ، ح ، هـ ، د فى اَ ، حَ ، هَ ، دَ على التناظر

فمن المعلوم بمقتضى بنـد ١٧ أن ب اَ ، ب حَ ، ب حـَ ، ب ءَ كلها أعمدة على ب ا١ ، ب ح١ ، ب حـ١ ، ب ء١ على التناظر وحينئذ يكون

ب (اَ حَ حـَ ءَ) = ب { ا١ ح١ حـ١ ء١ }

ومنه يحدث { اَ حَ حـَ ءَ } = ب { اَ حَ حـ١ ء١ }

= ب { ا١ ح١ حـ١ ء١ } = ع { ا١ ح١ حـ١ ء١ }

= ع { ا ح حـ ء }

١٤٤ ــ يمكننا بواسطة النظرية السابقة رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بخمس نقط معلومة أو يمس خمسة مستقيمات معلومة

اذا فرضنا اَ نقطة على المنحنى قريبة من نقطة ا قربا لانهائيا يكون

اَ { ا ح حـ ء } = هـ { ا ح حـ ء }

واذا فتعلم النسبة العكسية للحزمة اَ { ا ح حـ ء }

واذا ففى النهاية تنطبق الخطوط اَ ح ، اَ حـ ، اَ ء على ا ح ، ا حـ ، ا ء على التنـاظر وحينئذ فالماس فى نقطة ا هو المستقيم أو المرسوم من نقطة ا بحيث يكون ا { و ح حـ ء } = هـ { ا ح حـ ء } واذا فيمكننا رسم ممـاسات المنحنى فى النقط ا ، ح ، حـ ، ء [أنظر بنـد ١٥٤]

واذا فرض أن الماسين فى نقطتى ا ، ح يتقاطعان فى نقطة و فان المستقيم الواصل بين و ، ف التى هى منتصف ا ح يمر بمركز المنحنى

وكذلك اذا فرض أن الماسين فى نقطتى ح ، حـ يتقاطعان فى ى فان المسـتقيم الواصل بين ى ، لا التى هى منتصف ح حـ يمر بمركز المنحنى واذا فقد تعين المركز

واذا فرض أن م هى مركز المنحنى ورسمنا من م موازيا للمستقيم ا ح ليقطع فى نقطة ط المماس المرسوم من نقطة ح فبما أن م و ، م ط قطران متزاوجان فلو كانت النقطتان و ، ط فى جهتين متقابلتين بالنسبة الى ح يلزم أن يكون المنحنى قطعا ناقصا ويكون مربع القطر المزاوج للقطر م ح مساويا و ح . ح ط [بمقتضى بند ٧٠] واذا كانت و ، ط فى جهة واحدة من نقطة ح يلزم أن يكون المنحنى قطعا زائدا ويكون الخطان التقربيان قاطعين للماس المرسوم من نقطة ح فى نقطتى ل ، لَ بحيث يكون

ل ح٢ = ح لَ٢ = ح و . ح ط [بمقتضى بند ١٠٥]

ففى الحالة الاولى معلوم لنا زوج من الاقطار المتزاوجة فى قطع ناقص ومعلوم وصفهما وطولها ويمكن ايجاد المحاور وباقى الخطوط كما تقدم فى بند ٧٥

وفى الحالة الثانية معلوم لنا الخطان التقربيان ومماس ويمكن ايجاد المحاور وباقى الخطوط كما فى بند ١١١

ولنفرض ا ح ، ح حـ ، حـ د ، د هـ ، هـ ا خمسة مماسات معلومة لمنحنى قطاع مخروطى ولنفرض أن ا ح ، هـ ا ، حـ د ، ح حـ تقطع د هـ فى ل ، هـ ، د ، ن على التناظر وكذلك نفرض أن ا ح يقطع د حـ فى ك

فاذا فرض أن اَ حَ مماس منطبق تقريبا على ا ح وأن هذا المماس يقطع المماسات ا ح ، هـ ا ، حـ د ، ح حـ فى النقط ف ، اَ ، كَ ، حَ على التناظر فانه يحدث { ف اَ كَ حَ } = {ل هـ د ن }

ولنفرض أن اَ حَ يتحرك فى جهة ا ح حتى ينطبق عليه فينتج أن كَ تتحرك وتنطبق على ك وتنطبق حَ على ح ، اَ على ا ، ف على نقطة تماس المماس ا ح

وحينئذ يكون {ا ف ع ك} = {ل هـ ى ن}

وحيث ان النسبة التعاكسية للصف ا ، ف ، ع ، ك معلومة ومعلوم منه ثلاث نقط فيمكن بالسهولة معرفة النقطة الرابعة التى هى نقطة تماس المماس ا ع وحيث علمت نقط التماس للماسات الخمسة فيمكن تتميم رسم المنحنى كما فى الحالة المتقدمة

وواضح من الرسم المتقدم أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمر بخمس نقط معلومة بشرط أن لا تكون أربع من هذه النقط الخمسة واقعة على خط مستقيم وواضح أيضا أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمس خمسة مستقيمات معلومة بشرط أن لا تمر أربعة من هذه المستقيمات بنقطة واحدة

١٤٥ ــ المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث تكون الحزمة المكونة من وصلها بأربع نقط ثابتة وليست على خط مستقيم ذات نسبة تعاكسية ثابتة هو منحنى قطاع مخروطى يمر بالنقط الاربعة المعلومة

لنفرض ا ، ب ، حـ ، ى هى النقط الاربعة المعلومة وأن ع ، ن اى نقطتين موفيتين للارتباط الآتى

ع {ا ب حـ ى} = ن {ا ب حـ ى}

فواضح من البند السابق أنه يمكن رسم منحن واحد فقط يمر بخمس نقط بشرط أن لا يكون أربع منها على خط مستقيم

فاذا فرض أن ن ليست على المنحنى الذى تعينه النقط الخمسة ا ، ب ، حـ ، ى ، ع فلنفرض اذا أن ن ا يقطع المنحنى فى نقطة مثل ر وحيث ان ر واقعة على المنحنى المار بالنقط ا ، ب ، حـ ، ى ، ع

فيكون ر {ا ب حـ ى} = ع {ا ب حـ ى}

= ن {ا ب حـ ى}

ومنه ينتج أن ب ، حـ ، د يلزم أن تكون واقعة على خط مستقيم

وكذلك يمكن اثبات أن ا ، ب ، حـ واقعة على خط مستقيم [بمقتضى بند ١٣٨ مسألة ٤]

وبناء عليــه يلزم أن تكون النقطتان ق ، ر منطبقتين لأنه مفروض أن ا ، ب ، حـ ، د ليست على خط مستقيم وبذا يثبت المطلوب

١٤٦ — غلاف المستقيم الذى يقطع أربعة مستقيمات ثابتة وغير مارّة بنقطة واحدة يكون صفا ذا نسبة تعاكسية ثابتة هو قطاع مخروطى مماس للمستقيمات الاربعة الثابتة

لنفرض أن المستقيمات الاربعة يقطعها مستقيمان آخران فى النقط الآتية ع ، ق ، ر ، س وفى عَ ، قَ ، رَ ، سَ على التناظر

فمن المعلوم أن قطاعا مخروطيا واحدا فقط يمكن أنـ يمس المسـتقيمات الاربعة الثابتة ويمس المستقيم ع ق ر س واذا فرضنا أن عَ قَ رَ سَ لايمس هذا المنحنى نرسم مماسا آخر له من نقطة سَ ولنفرض أن هذا المماس يقطع ع عَ ، ق قَ ، ر رَ فى ك ، ل ، م على التناظر

فبمقتضى بند ١٤٣ يحدث

{ ك ل م سَ } = { ع ق ر س }

= { عَ قَ رَ سَ }

ومنه ينتج أن عَ ك ع ، قَ ل ق ، رَ م ر تتقاطع فى نقطة واحدة

وكذلك يمكن البرهنة على أن عَ ع ، قَ ق ، سَ س تتقاطع فى نقطة واحدة [أنظر بند ١٣٨ مسألة ٣]

وحيث ان المستقيمات الاربعة المفروضة لاتتقاطع فى نقطة واحدة فيلزم أن يكون المستقيمان عَ قَ رَ سَ ، ك ل م سَ منطبقين

١٤٧ ـ اذا رسم أى وترلمنحنى قطاع مخروطى من نقطة ثابتة مثل م فان المنحنى والمحور القطبي لنقطة م يقسمانه بنسبة توافقية

اذا كانت م خارج المنحنى يكون المحور القطبي لنقطة م قاطعا للمنحنى ولنفرض أن ا ، ب هما نقطتا التقاطع ونرسم من نقطة م وترا يقطع المنحنى فى نقطتى ن ، ر ويقطع المحور القطبي لنقطة م فى ف ونفرض أن المماسين فى نقطتى ن ، ر يتقاطعان فى نقطة ط

فاذا فرضت اَ ، بَ نقطتين من نقط المنحنى قريبتين جدا من ا ، ب على التناظر يحدث

اَ { ا ن ب ر } = بَ { ا ن ب ر }

واذا تحركت النقطتان اَ ، بَ فى جهة ا ، ب حتى انطبقتا عليهما فى النهاية فان الحزمتين المتقدمتين يقطعهما فى النهاية المستقيم م ن ف ر ويكون الصفين { م ن ف ر } ، { ف ن م ر } على التناظر واذا يكون { م ن ف ر } = { ف ن م ر }

ومن ذلك يستنتج أن ن ر منقسم بنسبة توافقية فى نقطتى م ، ف

وحيث ان م ط هو القطبي للنقطة الداخلية ف فالنظرية صحيحة لأى نقطة سواء كانت خارجة أو داخلة

وبالعكس اذا رسم خط مار بأى نقطة مثل م قاطعا لقطاع مخروطى فى نقطتى ن ، ر ثم أخذت نقطة على هذا المستقيم مثل نقطة ف بحيث يكون { م ن ف ر } = ــ ١ تكون نقطة ف واقعة على المحور القطبى لنقطة م بالنسبة لهذا المنحنى

١٤٨ ـ النسبة التعاكسية لصف مكوّن من أربع نقط على خط مستقيم تساوى النسبة التعاكسية للحزمة المكونة من المحاور القطبية لهذه النقط بالنسبة لاى منحن

لنفرض ا ، ب ، ح ، ى أربع نقط على خط مستقيم فالمحاور القطبية لهذه النقط بالنسبة لأى منحن تمر جميعها بقطب المستقيم ا ب ح ى بالنسبة لهذا المنحنى [بمقتضى بند ١١٢ أو بند ١٢٤]

ولنفرض أن ع اَ ، ع بَ ، ع حَ ، ع ىَ هى المحاور القطبية للنقط ا ، ب ، ح ، ى بالنسبة للمنحنى الذى بورته سـ ولنفرض أن المحاور القطبية تقطع الدليل المناظر فى النقط ا١ ، ب١ ، ح١ ، ى١ على التناظر

فحيث ان الزوايا ا١ سـ ا ، ب١ سـ ب ، ح١ سـ ح ، ى١ سـ ى كلها قائمة [بمقتضى بند ١٧] فيكون

سـ {ا ب ح ى} = سـ {ا١ ب١ ح١ ى١}

لكن سـ {{ا١ ب١ ح١ ى١}} = {{ا١ ب١ ح١ ى١}} = ع {{ا١ ب١ ح١ ى١}} = ع {اَ بَ حَ ىَ}

وحينئذ يكون {ا ب ح ى} = ع {اَ بَ حَ ىَ}

١٤٩ ـ تعريف : يقال لنقطتين انهما متزاوجتان بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى متى كانت كل منهما واقعة على المحور القطبى للأخرى وكذلك يقال لمستقيمين انهما متزاوجان بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى متى كان كل منهما مارًّا بقطب الآخر

الاقطار المتزاوجة فى قطاع مخروطى هى مستقيمات متزاوجة مارّة بمركز المنحنى

وأزواج المستقيمات المتزاوجة بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى والمارّة بنقطة واحدة هى متضامنة والمماسان للنحنى من هذه النقطة هما المستقيمان المضاعفان لهذا التضامن

لنفرض ع ا ، ع اَ وكذلك ع ب ، ع بَ .. الخ = جملة أزواج من الخطوط المتزاوجة بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى

ولنفرض أن المحور القطبى لنقطة ع بالنسبة للمنحنى يقطع ع اَ ، ع بَ ، ع حَ ، ع دَ فى النقط اَ ، بَ ، حَ ، دَ على التناظر فتكون اَ هى قطب ع ا لأنه مفروض أن قطب ع ا واقع على ع اَ ويلزم أن يكون على المحور القطبى لنقطة ع أيضا واذا فالنقط اَ ، بَ ، حَ ، دَ هى أقطاب ع ا ، ع ب ، ع ح ، ع د على التناظر وكذلك تكون ا ، ب ، ح هى أقطاب المستقيمات ع اَ ، ع بَ ، ...

وحينئذ بمقتضى البند المتقدم يكون

ع { ا ب ح اَ } = { اَ بَ حَ ا } = ع { اَ بَ حَ ا }

ومنه ينتج (بمقتضى بند ١٤١) أن ع ا ، ع اَ وكذلك ع ب ، ع بَ وكذلك ع ح ، ع حَ .. الخ هى أزواج من المستقيمات المتضامنة

وواضح أن المماسين المرسومين من ع هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن

ويمكن البرهنة بمثل هذه الطريقة على أن الازواج من النقط المتزاوجة على خط مستقيم هى متضامنة وأن نقطتى تقاطع المستقيم بالمنحنى هما النقطتان المضاعفتان لهذا التضامن

(مسألة ١) من نقطة ما مثل نقطة ع على منحنى قطاع مخروطى رسم الوتران ع و ، ع وَ بحيث يصنعان زاويتين متساويتين مع المماس فى نقطة ع والمطلوب البرهنة على أن و وَ يمر بنقطة ثابتة

لنفرض أن و وَ يقطع فى نقطة ط المماس فى نقطة ع ولنفرض أن المحور القطبى لنقطة ط يقطع و وَ فى ف فيكون الصف ط، و، ف، وَ صفا

توافقيا ويكون ط ع منصفا للزاوية الخارجة الواقعة بين ع ن ، ع نَ
ومن ذلك ينتج أن ع ف منصف للزاوية ن ع نَ أى أن ع ف هو
العمودى فى نقطة ع وحينئذ فتكون ط نقطة ثابتة أى أنها هى قطب الوتر
العمودى فى نقطة ع

(مسألة ٢) جميع القطاعات المخروطية المارة بأربع نقط معلومة تشتمل
على مثلث مشترك تكون رؤوسه أقطاب أضلاعه

لنفرض أن ا ، ح ، حـ ، ء هى النقط الاربعة المعلومة (أنظر الشكل
الاخير من بند ١٣٨)

وحيث ان { ح م ء ب } = — ١ فتكون ب واقعة على المحور القطبى
لنقطة م بالنسبة لأى واحد من هذه المنحنيات

وكذلك تكون نقطة ر على المحور القطبى لنقطة م بالنسبة لأى منحن
من هذه المنحنيات

وحينئذ فتكون نقطة م هى قطب الخط ب ر

ثم حيث ان { ا ك ء ع } = — ١ فتكون نقطة ك واقعة على المحور
القطبى لنقطة ع بالنسبة لأى واحد من هذه المنحنيات

وكذلك تكون نقطة ل واقعة على المحور القطبى لنقطة ع

وحينئذ فنقطة ع هى قطب المستقيم ل م ك ن بالنسبة لأى منحن من
هذه المنحنيات وحيث ان المحورين القطبيين لنقطتى م ، ع يمران بنقطة ن
فيلزم أن تكون ن هى قطب المستقيم م ع

وحينئذ فكل رأس من رؤوس المثلث م ع ن هى قطب الضلع المقابل
لها بالنسبة لأى منحن من المنحنيات المارة بالنقط الاربعة ا ، ح ، حـ ، ء

(مسألة ٣) جميع منحنيات القطاعات المخروطية التى تمس أربعة مستقيمات معلومة تشتمل على مثلث مشترك رؤوسه أقطاب أضلاعه

لنفرض ا ح ، ح ء ، ء د ، د ا هى المستقيمات الاربعة المعلومة (الشكل الاخير من بند ١٣٨)

ولنفرض أن و هى قطب ا ء بالنسبة لأى منحن مماس للمستقيمات الاربعة المعلومة فبمقتضى بند ١٤٧ تكون الحزمة .

ا { ح ء د و } = ــ ١ = ء { ح ا د و }

ومنه ينتج أن و يلزم أن تكون واقعة على ح د ومنطبقة على نقطة ب لأنه من المعلوم أن { ح م د ب } = ــ ١

وحينئذ فنقطة ب هى قطب ا ء بالنسبة لأى منحن من هذه المنحنيات

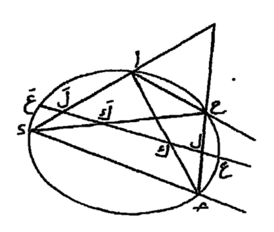
وكذلك تكون نقطة ر قطب المستقيم ح د ونقطة م قطب المستقيم ع ق

وحينئذ فكل رأس من رؤوس المثلث م ب ر هى قطب الضلع المقابل لها بالنسبة لأحد المنحنيات التى تمس المستقيمات الاربعة ا ع ، ح ء ، ء د ، د ا وحيث ان ا واقعة على المحور القطبى لنقطة ب بالنسبة لأى منحن من المنحنيات فيكون المحور القطبى لنقطة ا مارا بنقطة ب أى أن المستقيم الواصل بين نقطتى تماس المماسين ا ح ، ا د يمر بنقطة ب ويكون الامر كذلك بالنسبة لأى زوج آخر من المماسات

وحينئذ فالمستقيم الواصل بين أى نقطتى تماس فى أى منحن من المنحنيات يمر برأس من رؤوس المثلث م ب ر

١٥٠ ــ منحنيات القطاعات المخروطية المارة بأربع نقط معلومة يقطعها أى مستقيم فى أزواج من نقط متضامنة

لنفرض ا ، ح ، ‍ح ، ء هى النقط الاربعة المعلومة وأن خطا مستقيما يقطع ا ‍ح ، ح ء فى ك ، كَ على التناظر ويقطع ا ء ، ح ‍ح فى ل ، لَ على التناظر ثم نفرض أن هذا المستقيم يقطع أى منحن من المنحنيات المارة بالنقط الاربعة فى ع ، عَ على التناظر



فحيث ان النقط الستة واقعة على منحن واحد فيكون

ا { عَ ء ‍ح ع } = ح { عَ ء ‍ح ع }

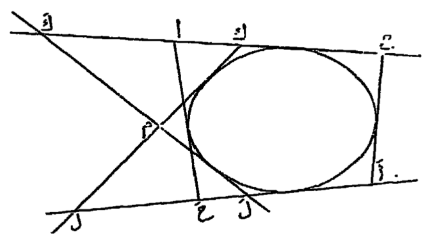
فمن الصفوف المكونة من هذه الحزم على المستقيم ع عَ يحدث

{ عَ لَ كَ ع } = { عَ كَ لَ ع }

∴ { عَ لَ كَ ع } = { ع ل كَ عَ }

ومن ذلك يتضح أن ع ، عَ هما نقطتان متزاوجتان فى التضامن الذى يعينه الزوجان ك ، كَ ، ل ، لَ

١٥١ – أزواج المماسات المرسومة من نقطة ما لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مماسة لاربعة مستقيمات معلومة هى متضامنة لنفرض أن الاربعة المستقيمات المعلومة هى ا ح ، ح اَ ، اَ حَ ، حَ ا وأن المماسين المرسومين من م لاحد المنحنيات يقطعان ا ح فى ك ، كَ ويقطعان اَ حَ فى نقطتى ل ، لَ



فحيث ان ك ل ، كَ لَ والمستقيمات الأربعة المعلومة تمس منحنيا واحدا

يكون { ح ك ا كَ } = { اَ ل ح لَ }

وحينئذ يكون م { ح ك ا كَ } = م { اَ ل حَ لَ }

= م { اَ ك حَ كَ }

∴ م { ح ك ا كَ } = م { حَ لَ اَ ك }

ومن ذلك يتضح أن م ك ، م كَ شعاعان متزاوجان فى التضامن الذى يعينه الزوجان م ا , م اَ ، م ح , م حَ

(مسئلة ١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز منحنيات القطاعات المخروطية المارة بأربع نقط معلومة هو قطاع مخروطى

لنفرض ا ، ب ، حـ ، ى هى النقط الاربعة المعلومة وان ح ، ف ، لا ، و هى منتصفات ا ب ، ب حـ ، حـ ى ، ى ا على التناظر

ولنفرض م مركز منحنى قطاع مخروطى مار بالنقط الأربعة وان م ع ، م ن , ، م ر ، م س خطوط موازية للمستقيمات ا ب ، ب حـ ، حـ ى ، ى ا على التناظر فيكون م ح ، م ع قطرين متزاوجين فى المنحنى ويكون

كذلك المستقيمان م ف ، م ن والمستقيمان م لا ، م ر وكذلك م و ، م س أقطارا متزاوجة فيه أيضا

وحيث ان الاقطار المتزاوجة هى أزواج من الخطوط المتزاوجة فى التضامن فيكون م { ح ف لا و } = م { ع ن ر س }

وحيث ان اتجاهات المستقيمات م ع ، م ن ، م ر ، م س ثابتة فيكون م { ع ن ر س } ثابت

وحينئذ م { ح ف لا و } ثابت واذا يلزم أن تكون نقطة م واقعة على منحنى قطاع مخروطى ثابت مار بالنقط ح ، ف ، لا ، و

وكذلك يكون القطاع الذى عليه المركز مارًا بمنتصفى ا ح ، ب ى

فتكون ثلاثة من القطاعات هى الازواج الآتية من الخطوط ا ب , ح ى ، ا ح , ب ى ، ا ى , ب ح واذا فيلزم أن يكون المحل الهندسى للمراكز مارًا بنقط التقاطع الثلاثة لهذه الازواج من الخطوط

(مسئلة ٢) المطلوب البرهنة على أن دوائر الاستدلال لجميع القطاعات المخروطية التى تمس أربعة مستقيمات معلومة لها محور أصلى مشترك وان مراكزها واقعة على المستقيم المارّ بمنتصفات أقطار الشكل الرباعى المكوّن من الأربعة الخطوط المعلومة

من المعلوم [بمقتضى بند ١٥١] أن المماسات المرسومة لهذه القطاعات المارة بنقطة مّا هى أزواج من مستقيمات متضامنة فاذا فرض أن م نقطة تقاطع أى دائرتين من دوائر الاستدلال يكون زوجان من الاشعة المتزاوجة من حزمة التضامن متعامدين [و بمقتضى بند ١٤١] يكون كل زوج من الاشعة متعامدا واذا فنقطة م واقعة على دائرة الاستدلال لكل منحن آخر من هذه المنحنيات

وحيث ان كل دائرة استدلال تمر بالنقطتين المشتركتين لأى دائرتين من هذه الدوائر فتكون جميع هذه الدوائر لها محور أصلى مشترك وحينئذ فمراكزها كلها واقعة على مستقيم عمود على هذا المحور الأصلى

ثم ان الخط المضاعف الذى يصل بين نهايتى أحد أقطار الشكل الرباعى المكوّن من المستقيمات المعلومة هو الوضع النهائى لمنحنى قطاع مخروطى مماس لهذه الخطوط وحينئذ فمنتصف أحد الأقطار واقع على المحل الهندسى لمراكز هـذه المنحنيات وبناء عليه فالمحل الهندسى لهـذه المراكز يلزم أن يكون هو المستقيم المـار بمنتصفات الاقطار الثلاثة للشكل الرباعى المذكور

ويكون أحد هذه المنحنيات قطعا مكافئا ودليله هو المحور الاصلى المشترك لدوائر الاستدلال

(مسئلة ٣) المطلوب البرهنة على أن أوتار القطاع المخروطى التى تقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ثابتة على المنحنى تتقاطع جميعها على العمودى فى هذه النقطة

لنفرض ا اَ ، ب بَ ، حـ حَ ثلاثة أوتار فى قطاع مخروطى وأنها تقابل زاوية قائمة رأسها نقطة م الواقعة على المنحنى

فتكون المستقيمات م ا , م اَ ، م ب , م بَ ، م حـ , م حَ أزواجا من مستقيمات متعامدة وحينئذ فهى متضامنة

وحينئذ م { ا ب اَ حـ } = م { اَ بَ ا حَ }

لكن م { ا ب اَ حـ } = حَ { ا ب اَ حـ }

، م { اَ بَ ا حَ } = ب { اَ بَ ا حَ }

وحينئذ حَ { ا ب اَ حـ } = ب { اَ بَ ا حَ }

= ب { ا حَ اَ بَ }

وهذه الحزم المتساوية فى النسبة التعاكسية لها شعاع مشترك وهو ب حَ
واذا فنقط تقاطع أشعتها الاخرى المتناظرة يلزم أن تكون واقعة على خط
مستقيم وحينئذ فالنقطتان ا ، اَ ونقطة تقاطع ح حَ مع ب بَ يلزم أن
تكون واقعة على خط مستقيم وبناء عليه فالمستقيمات ا اَ ، ب بَ ، ح حَ
تتقاطع فى نقطة واحدة وحينئذ كل وتر يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة م يلزم
أن يمر بنقطة تقاطع أى وترين آخرين من هذا القبيل

ويلزم أن تكون النقطة الثابتة التى يمر بها جميع الاوتار واقعة على العمودى
فى نقطة م لان العمودى هو وضع نهائى لأحد الاوتار

(مسئلة ٤) اذا فرض أن العمود النازل من نقطة مثل نقطة ع
على محورها القطبى بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى معلوم يمر بنقطة ثابتة مثل
نقطة ك فالمطلوب البرهنة على أن ع واقعة على منحنى قطع زائد قائم يكون
خطاه التقربيان موازيين لمحورى المنحنى الاول ومارًا بنقطة ك وبمركز
المنحنى الاول

لأنه اذا فرض أن العمود النازل من نقطة ع على محورها القطبى بالنسبة
لمنحنٍ مّا يقطع المحور القاطع لهذا المنحنى فى نقطة ح وان ع ق هو العمود
النازل على هذا المحور فمن المعلوم أن ح ح : ح ق ثابت وحينئذ فاذا كان
ع ل ، ع م موازيين لمحورى المنحنى تكون الحزمة ع { ح ح ل م } ثابتة

ولكن حيث ان ع { ح ك ل م } ثابت فينتج أن نقطة ع واقعة على
منحنٍ ثابت مار بنقطة ح ونقطة ك ونقطتين على بعد لانهائى فى اتجاه المحورين
وبذلك يثبت المطلوب

وهناك حالة خصوصية لهذه النظرية

النقط الواقعة على منحنى قطاع مخروطى والتى تكون الاعمـدة المرسومة منها مارّة بنقطة ثابتة مثل نقطة ك هى واقعة على قطع زائد قائم مار بنقطة ك وبمركز المنحنى الاول وخطاه التقربيان موازيان لمحورى المنحنى الاول

(مسئلة ٥) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لقطب مستقيم معلوم بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مارّة بأربع نقط ثابتة هو منحنى قطاع مخروطى

لنفرض أن النقط المعلومة هى ا ، ب ، حـ ، ؛ وأن المستقيم المعلوم يقطع ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا على التناظر فى ع ، ں ، ر ، س ولنفرض عَ نقطة على ا ب بحيث يكون {ع ا عَ ب} = — ١ وان ںَ ، رَ ، سَ هى النقط المناظرة لها على الخطوط الأخرى فتكون المحاور القطبية للنقط ع ، ں ، ر ، س بالنسبة لاحد المنحنيات مارة بالنقط عَ ، ںَ ، رَ ، سَ على التناظر واذا فاذا كانت ك هى قطب المستقيم ع ں ر س بالنسبة لاى منحن من المنحنيات تكون ك ع ، ك عَ الخ أزواجا من الخطوط المتزاوجة وحينئذ يكون ك {عَ ںَ رَ سَ} = ك {ع ں ر س} = {ع ں ر س} = مقدارا ثابتا

(مسئلة ٦) المطلوب البرهنة على أن غلاف المحور القطبى لنقطة معلومة بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مماسة لأربعة مستقيمات ثابتة هو منحنى قطاع مخروطى

لنفرض أن و هى النقطة المعلومة وأن ا ب حـ ء هو الشكل الرباعى الذى أضلاعه الاربعة ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا تمس جميع المنحنيات المذكورة

ولنفرض أن ا اَ هو المستقيم المرسوم من ا بحيث يكون ا { و ب اَ ء } = — ١ وأن ب بَ ، حـ حـَ ، ء ءَ هى المستقيمات المناظرة له المارة بالرؤوس الاخرى

وحيث ان ا ب ، ا ء مماسان فينتج أن قطب و ا بالنسبة لاى منحن من المنحنيات واقع على ا اَ وكذلك الامر بالنسبة للخطوط الاخرى

وحينئذ اذا فرض أن المحور القطبي لنقطة و بالنسبة لاى منحن من المنحنيات يقطع ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ ، ء ءَ فى ك ، ل ، م ، ن على التناظر تكون هذه النقط أقطاب المستقيمات و ا ، و ب ، و حـ ، و ء على التناظر بالنسبة لهذا المنحنى

وحينئذ يكون { ك ل م ن } = و { ا ب حـ ء }
= مقدارا ثابتا

وحينئذ فالمحور القطبي لنقطة و يغلف منحنى قطاع مخروطى ثابت تمسه المستقيمات ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ ، ء ءَ

(مسئلة ٧) المطلوب البرهنة على أن المحاور القطبية لنقطة معلومة بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مارة بأربع نقط ثابتة تمر كلها بنقطة واحدة

لنفرض ا ، ب ، حـ ، ء هى النقط الاربعة التى تمر بها المنحنيات وان ب ا ، حـ ء يتقاطعان فى نقطة س وان ا ء ، ب حـ يتقاطعان فى نقطة ص

ولنفرض أن و هى النقطة المعلومة

ولنفرض أن وَ هى نقطة تقاطع الرابع المتناسب التوافقى للمستقيمات س ء حـ ، س و ، س ا ب مع الرابع المتناسب التوافقى للمستقيمات

صـ ء ا ، صـ و ، صـ حـ ب بحيث يكون

سـ {ء و ب وَ} = — ١ = صـ {ء و ب وَ}

ونفرض أن و وَ يقطع ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا فى ل ، م ، لَ ، مَ على التناظر ويقطع أى منحنٍ آخر مار بالنقط ا ، ب ، حـ ، ء فى نقطتى ع ، عَ

فمن المعلوم أن ل، لَ ، م، مَ ، ع ، عَ هى أزواج من نقط متضامنة

ولكن {لَ و ل وَ} = سـ {لَ و ل وَ} = سـ {ء و ب وَ} = — ١
، {مَ و م وَ} = صـ {مَ و م وَ} = صـ {ء و ب وَ}

ومنه ينتج أن و ، وَ هى النقطتان المضاعفتان للتضامن الذى يعينه الزوجان ل، لَ ، م، مَ

وحينئذ يحدث {ع هـ عَ هـَ} = — ١

واذا فالمحور القطبى لنقطة و بالنسبة للمنحنى المار بالنقط ا ، ب ، حـ ، ء ، ع ، عَ يمر بالنقطة الثابتة وَ

(مسألة ٨) المطلوب البرهنة على أن أقطاب مستقيم معلوم بالنسبة لجملة منحنيات قطاعات مخروطية مماسة لاربعة مستقيمات ثابتة هى جميعا واقعة على خط مستقيم

لنفرض ا ب حـ أحد المماسات المعلومة وأن ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ هى الاقطار الثلاثة للشكل الرباعى المكوّن من المماسات الاربعة

ثم نفرض أن المستقيم المعلوم يقطع ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ فى ل ، م ، ن على التناظر

ثم نأخذ على ا ا َ ، ب بَ النقطتين ح ، ب على التناظر بحيث يكون

{ل ا ح اَ} = — ١ = {م ب ف بَ}

ونفرض ان ح ب يقطع المستقيم المعلوم ل م ن فى نقطة و

ونفرض أن و ع ، و عَ هما المماسان لاحد المنحنيات الاخرى من نقطة و

فمن المعلوم أن (و ا ، و اَ) ، (و ب ، و بَ) ، (و حـ ، و حـَ) ، (و ع ، و عَ) هى أزواج من مستقيمات متضامنة

ولكن و {ل ا ح اَ} = — ١

، و {م ب ف بَ} = و {ل ب ح بَ} = — ١

ومنه ينتج أن و ل ، و ح هما الخطان المضاعفان للتضامن الذى يعينه الزوجان (و ا ، و اَ) ، (و ب ، و بَ)

وحينئذ يكون و {ل ع ح عَ} = — ١

واذا فقطب و ل بالنسبة للمنحنى الذى يمس و ع ، و عَ واقع على المستقيم الثابت ح ب و

واذا تباعد المستقيم ل م ن الى مالا نهاية صارت النقطتان ح ، ب منتصفى ا اَ ، ب بَ واذا فالمحل الهندسى لأقطاب المستقيم الموضوع على بعد لانهائى أعنى المحل الهندسى لمراكز المنحنيات هو المستقيم المارّ بمنتصفات أقطار الشكل الرباعى [انظر مسألة ٢]

١٥٢ — نظرية باسكال اذا رسم مسدس فى منحنى قطاع مخروطى فان النقط الثلاثة التى تتقاطع فيها الثلاثة الازواج من الاضلاع المتقابلة تكون واقعة على خط مستقيم

نفرض أن ا ، ح ، ح ، ى ، هـ ، ب هى ست نقط على منحنى قطاع مخروطى وأن ا ح ، ى هـ يتقاطعان فى ل وان ح ح ، هـ ب يتقاطعان فى م ، ح ى ، ب ا يتقاطعان فى ن

ويراد البرهنة على أن ل ، م ، ن واقعة على خط مستقيم

ولنفرض أن ى هـ يقطع ح ح فى و وان ى ح يقطع ا ح فى ى

فيكون ل { ح ح ى م } = ح ح و م

= هـ { ح ح و م }

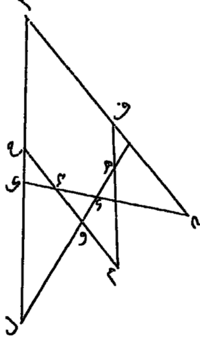
= هـ { ح ح ى ب }

= ا { ح ح ى ب } لان النقط الستة واقعة على منحن واحد

= { ى ح ى ن }

= ل { ى ح ى ن }

= ل { ح ح ى ن }



ومنه ينتج أن ل م ، ل ن على خط مستقيم واحد

وحيث يمكن ترتيب ست نقط بكيفيات مختلفة عددها ستون فيمكن رسم ستين مسدسا مناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى وحيث ان نظرية پاسكال صحيحة لكل مسدس من هذه المسدسات فيوجد ستون خطا بسكاليا مناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى

١٥٣ ـ نظرية بريانكون ـ اذا رسم مسدس على منحنى قطاع مخروطى فان أقطاره الثلاثة تتقاطع فى نقطة واحدة

لانه اذا رسم مسدس على منحنى قطاع مخروطى فان نقط تماس أضلاعه تكون هى نقط رؤوس مسدس مرسوم داخل المنحنى ويكون كل راس من رؤوس المسدس الخارجى قطب الضلع المناظر لها من المسدس الداخلى وحينئذ فكل قطر من أقطار المسدس الخارجى أى المستقيم الواصل بين رأسين متقابلين من رؤوسه يكون هو المحور القطبى لنقطة تقاطع ضلعين متقابلين من أضلاع المسدس الداخلى ولكن النقط الثلاثة التى تتقاطع فيها أزواج من الاضلاع المتقابلة من المسدس الداخلى واقعة على خط مستقيم بمقتضى نظرية پاسكال وحينئذ فالمحاور القطبية الثلاثة لهذه النقط أعنى الأقطار الثلاثة للمسدس الخارجى تتقاطع فى نقطة واحدة

اذا علمت خمسة مماسات لمنحنى قطاع مخروطى يمكن ايجاد نقط التماس بواسطة نظرية بريانكون

لانه اذا فرض أن ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ هى رؤوس المخمس المكوّن من المماسات المعلومة وأن ك هى نقطة تماس ا ب تكون ا ، ك ، ب ، حـ ، ى ، هـ هى رؤوس مسدس خارجى ضلعان من أضلاعه منطبقان على بعضهما و بمقتضى نظرية بريانكون يكون ى ك مارا بنقطة تقاطع ا حـ مع ب هـ واذا فقد علمت نقطة ك و بمثل هذه الطريقة يمكن ايجاد نقط التماس الأخرى

ويمكن بواسطة نظرية پاسكال أيضا ايجاد المماسات لمنحنى قطاع مخروطى فى خمس نقط معلومة عليه

لأنه اذا فرض أن ا ، ب ، ح ، ء ، ه هى النقط الخمسة المعلومة وكانت ف نقطة قريبة من ا قربا لانهائيا فبمقتضى نظرية پاسكال تكون النقط الثلاثة التى يتقاطع فيها ا ب مع ء ه ، ب ح مع ه ف ، ح ء مع ف ا واقعة جميعا على خط مستقيم فاذا فرض أن المستقيم الواصل بين نقطة تقاطع ا ب مع ء ه ونقطة تقاطع ب ح مع ه ا يقطع ح ء فى ع لكان ا ع اذا هو المماس فى نقطة ا وبمثل هذه الطريقة يمكن ايجاد نقط التقاطع الاخرى

١٥٤ – المسائل الآتية ذات أهمية عظمى

(مسئلة ١) اذا فرض أن مثلثين مرسومين على منحنى قطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن الرؤوس الستة واقعة على منحنى قطاع مخروطى آخر

لنفرض أن ا ب ح ، اَ بَ حَ هما المثلثان

ثم نفرض أن بَ حَ يقطع ا ب ، ا ح فى هَ ، ءَ على التناظر وان ب ح يقطع اَ بَ ، اَ حَ فى ه ، ء على التناظر

فيكون المماسان ب ح ، بَ حَ قاطعين للمماسات الاربعة الباقية فى صفوف ذات نسب تعاكسية متساوية

وحينئذ يكون {ب ح ه ء} = {هَ ءَ بَ حَ}

∴ اَ{ب ح ه ء} = ا{هَ ءَ بَ حَ}

أى أن اَ{ب ح بَ حَ} = ا{ب ح بَ حَ}

وبذا يثبت المطلوب

ويمكن البرهنة الآن على أنه اذا أمكن رسم مثلث فى منحنى قطاع مخروطى معلوم وعلى منحنى قطاع مخروطى معلوم آخر فانه يمكن رسم مثلثات بهذه الكيفية لانهاية لعددها

للبرهنة على ذلك نفــرض ا ب ح مثلثا مرسوما فى المنحنى س وعلى المنحنى سَ

ثم نرسم أى ممـاس للمنحنى سَ ونفرض أنه يقطع المنحنى س فى نقطتى بَ ، حَ ونفرض أن المماسين الآخرين للمنحنى سَ المرسومين من بَ ، حَ يتقاطعان فى اَ

وحيث قد برهنا على أن اَ ، بَ ، حَ ، ا ، ب ، ح واقعــة على منحن واحد ومعلوم أن خمس نقط منها واقعــة على المنحنى س فاذا تكون النقطة السادســة على المنحنى س لأنه لايمكن أن يمر بخمس نقط معـلومة سوى منحن واحد.

(مسألة ٢) اذا رسم مثلثان فى منحنى قطاع مخروطى فان أضلاعهما الستة تمس قطاعا مخروطيا آخر

لنفرض أن المثلثين هما ا ب ح ، اَ بَ حَ

ونفرض أن ب ح يقطع اَ بَ ، اَ حَ فى هـ ، ف على التنـاظر وأن بَ حَ يقطع ا ب ، ا ح فى هـَ ، فَ على التناظر

فحيث ان النقط الستة ا ، ب ، ح ، اَ ، بَ ، حَ واقعة على منحن واحد فيكون.

ا {ب ح بَ حَ} = اَ {ب ح بَ حَ}

∴ {هـَ فَ بَ حَ} = {ب ح هـ ف}

وبذا يثبت المطلوب

(مسألة ٣) اذا فرض مثلثان وكانت رؤوسهما أقطاب أضلاعهما بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى أيا كان فالمطلوب البرهنة على أن رؤوسهما الستة واقعة على قطاع مخروطى آخر وأن أضلاعهما الستة تمس قطاعا مخروطيا ثالثا

لنفرض ا ب ح ، اَ بَ حَ مثلثين رؤوسهما أقطاب أضلاعهما بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى أيا كان .

ونفرض أن اَ بَ ، اَ حَ يقطعان ب ح فى ك ، ل على التناظر

بحيث ان بَ هى قطب اَ حَ ، ا قطب ب ح فيكون ا بَ هو المحور القطبي لنقطة ل وكذلك يكون ا حَ هو المحور القطبي لنقطة ك

ومن المعلوم أن الحزمة المكونة من أربعة مستقيمات أيا كانت والمارة بنقطة و الصف المكون من أقطاب هذه المستقيمات نسبتها التعاكسية واحدة

وحينئذ يكون ا {ب ح بَ حَ} = {ح ب ل ك}
= اَ {ح ب ل ك}
= اَ {ح ب حَ بَ}
= اَ {ب ح بَ حَ}

ومنه ينتج أن النقط ا ، ب ، ح ، اَ ، بَ ، حَ واقعة على منحن واحد ثم نفرض أن بَ حَ يقطع ا ب ، ا ح فى ف ، ع على التناظر فيكون
{ح ب ل ك} = ا {ب ح بَ حَ}
= {ف ع بَ حَ}
= {ع ف حَ بَ}

بحيث يكون ب ح ، بَ حَ قاطعين للاضلاع الاربعة الاخرى فى صفوف ذات نسبة تعاكسية واحدة ومنه ينتج أن الاضلاع الستة تمس منحنيا واحدا.

والآن يمكننا البرهنة على أنه اذا أمكن رسم مثلث فى منحنى قطاع مخروطى معلوم أو عليه وكانت رؤوس هذا المثلث أقطاب أضلاعه بالنسبة لمنحن آخر معلوم فانه يمكن رسم مثلثات بهذه الكيفية لانهاية لعددها [أنظر مسألة ١]

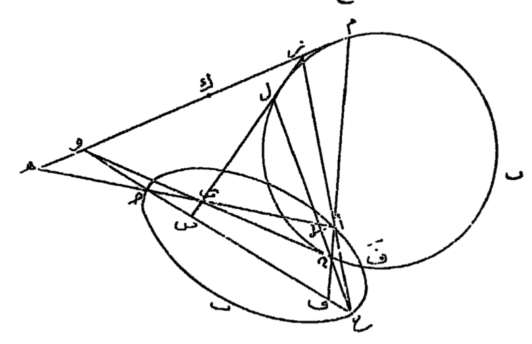
(مسألة ٤) اذا كانت رؤوس مثلث أقطاب أضلاعه بالنسبة لمنحنى القطاع المخروطى ب وكان مرسوما فى القطاع المخروطى بَ فالمطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مثلثات لانهاية لعددها تكون رؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى بَ وتكون مرسومة على المنحنى ب

لنفرض أن ا ع ح هو المثلث المرسوم فى المنحنى بَ وأن رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة للمنحنى ب

ونفرض أن ك هى قطب الضلع ا ح بالنسبة للمنحنى بَ

ونرسم من نقطة ك المماس ك م للمنحنى ب ونفرض أن ك م يقطع ع ح فى نقطة و ويقطع ا ح فى نقطة هـ

فحيث ان و واقعة على ع ح فاذا فرض أن و ن هو المماس الثانى المرسوم من نقطة و للمنحنى ب يكون م ا ن خطا مستقيما ثم نفرض أن م ن يقطع ع ح فى نقطة ف وأن و ن يقطع ا ح فى نقطة ى ويقطع ا ع فى نقطة فَ ثم نفرض أن المماس الثانى للمنحنى ب من نقطة ى يمس المنحنى المذكور فى نقطة ل ويقطع و م فى نقطة ر ، ع ح فى نقطة ص



فحيث ان ا قطب الضلع ع ح بالنسبة للمنحنى ب فيكون

— ١ = {ف ق ا م} = و{ف ق ا م} = {ح ء ا هـ} = {ا ء ح هـ}

وحينئذ فالمحور القطبي لنقطة ء بالنسبة للمنحنى بَ يمر بنقطة هـ وكذلك يمر بنقطة ك لان ك هى قطب المستقيم ح ء ا بالنسبة للمنحنى بَ

وحينئذ فالمستقيم و ن هو المحور القطبي لنقطة ء بالنسبة للمنحنى بَ

ثم حيث ان ع هى قطب المستقيم ح ا بالنسبة للمنحنى ب فيكون

— ١ = {ع ق لا ل} = ء{ع ق لا ل} = {ع و ح ص} = {ع ص ح و}

وحينئذ فالمحور القطبي لنقطة و بالنسبة للمنحنى بَ يمر بنقطة ص وحيث ان و ن هو المحور القطبي لنقطة ء فيكون المحور القطبي لنقطة و مارًا بنقطة ء

وحينئذ يكون ء ن هو المحور القطبي لنقطة و بالنسبة للمنحنى بَ واذا فالمثلث و ء ن الذى تمس أضلاعه الثلاثة المنحنى ب تكون رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة للمنحنى بَ ومن المعلوم أنه اذا وجد مثلث واحد من هذا القبيل مثل المثلث و ء ن توجد مثلثات من هذا القبيل أيضا لانهاية لعددها

١٥٥ ـ الصفوف والحزم المتناظرة ـ يقال للصفوف والحزم انها متناظرة متى كانت كل أربع من عناصر احداها لها نسبة تعاكسية تساوى النسبة التعاكسية للعناصر الاربعة المناظرة لها فى الاخرى

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن نقط تقاطع الخطوط المتناظرة فى حزمتين متناظرتين ترسم منحنى قطاع مخروطى

لنفرض ع ، ق ، ر ، س أربع نقط أيا كانت من نقط تقاطع المستقيمات المتناظرة وأن ك ، كَ هما رأسا الحزمتين

فبمقتضى الفرض يكون ك { ع ن م س } = كَ { ع ن م س } ومنه ينتج أن ك و كَ و ع و ن و م و س واقعة جميعا على قطاع مخروطى ومعلوم أنه تكفى خمس نقط لتعيين المنحنى وحينئذ فالمنحنى المار بالنقطتين ك و كَ وبثلاث نقط أيا كانت من نقطة التقاطع يمر بكل نقطة تقاطع أخرى

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن المستقيمات الواصلة بين النقط المتناظرة فى صفين متناظرين على مستقيمين مختلفين تغلف قطاعا مخروطيا

(مسألة ٣) اذا فرض أن ا ب و اَ بَ مستقيمان محدودان أيا كانا وان ع نقطة على المستقيم الاول و عَ نقطة على المستقيم الثانى بحيث يكون ا ع : ع ب = اَ عَ : عَ بَ فالمطلوب البرهنة على أن المستقيم ع عَ يغلف قطعا مكافئا

(مسألة ٤) المطلوب ايجاد الخطوط المشتركة لحزمتين متناظرتين مارتين بنقطة واحدة

لنفرض ك ا و ك ب و ك ح ثلاثة أشعة أيا كانت فى حزمة وان ك اَ و ك بَ و ك حَ هى الثلاثة الاشعة المناظرة لها فى الحزمة الثانية فعلينا ايجاد المستقيم ك ع بحيث يكون ك {ا ب ح ع} = ك {اَ بَ حَ ع}

ثم نرسم دائرة أيا كانت تمر بنقطة ك ونفرض ان النقط ا و ب و ح و اَ و بَ و حَ واقعة على هذه الدائرة

ونفرض ان ا بَ و اَ ب يتقاطعان فى نقطة و وان ا حَ و اَ ح يتقاطعان فى نقطة ى وان و ى تقطع الدائرة فى نقطة مثل نقطة ع

فاذا فرض ان ا اَ يقطع المستقيم و ى ع فى نقطة ن يكون

{ن و ى ع} = ا{ن و ى ع} = ا {اَ بَ حَ ع} = ك {اَ بَ حَ ع}

لان النقط جميعها واقعة على محيط الدائرة وكذلك يكون

{ ن و ى ع } = ك { ا ب ح ع }

وحينئذ فالمستقيم كع هو أحد المستقيات المطلوبة وواضح من الرسم ان أى حزمتين متناظرتين بهما شعاعان مشتركان حقيقيان أو منطبقان أو تخيليان

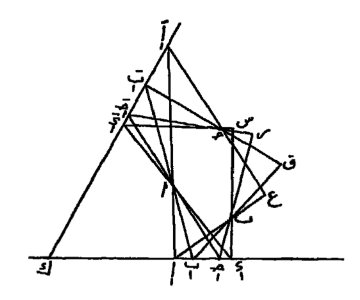
(مسألة ٥) المطلوب ايجاد النقط المشتركة لصفين متناظرين على مستقيم واحد لذلك نصل النقط المعلومة بنقطة أيا كانت مثل نقطة ك ونبرهن كما فى مسألة ٤

(مسألة ٦) اذا فرض أن ثلاثة أضلاع مثلث تمر بنقط ثابتة وأن نهايتى قاعدته واقعتان على مستقيمين ثابتين فالمطلوب البرهنة على أن رأس المثلث ترسم منحنى قطاع مخروطى

لنفرض أن ا ، ب ، ح هى النقط الثلاثة الثابتة وان ك ا١ ، ك ا١َ هما المستقيان الثابتان ثم نرسم مثلثات كما فى الشكل

فيكون الصفان { ا١ ب١ ح١ ء١ ... } ، { ا١َ ب١َ ح١َ ء١َ ... } متناظران

وحينئذ فالحزمتان ب { ا١ ب١ ح١ ء١ ... } ، ح { ا١ ب١ ح١ ء١ ... } متناظرتان فينتج المطلوب من مسألة ١



وما ذكر هو طريقة ماكلورين فى تولد القطاع المخروطى

(مسألة ٧) اذا فرض أن جميع أضلاع شكل كثير الاضلاع تمر بنقط ثابتة وأن جميع رؤوسه ماعدا رأس واحدة تتحرك على مستقيمات ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن الرأس الباقية ترسم منحنى قطاع مخروطى

١٥٦ ـ النقطتان الدائريتان اللانهائيتان ـ

حيث ان أى زوج من المستقيمات المتعامدة المارة بمركز دائرة هو قطران متزاوجان وحيث ان الازواج من المستقيمات المتزاوجة بالنسبة لقطاع مخروطى والتى تمر بنقطة ما هى متضامنة وأن المماسين الحقيقيين أوالتخيليين لهذا المنحنى والمارين بهذه النقطة هما الخطان المضاعفان لهذا التضامن فتكون الخطوط التقربية التخيلية لجميع الدوائر متوازية أى أن جميع الدوائر تمر بهاتين النقطتين التخيليتين نفسهما وعلى بعد لانهائى

وكذلك فالدوائر المشتركة فى المركز لها خطان تقربيان تخيليان مشتركان

وحينئذ فتكون هذه الدوائر متماسة فى نقطتين على بعد لانهائى

النقطتان التخيليتان اللتان على بعد لانهائى واللتان تمر بهما جميع الدوائر يسميان النقطتين الدائريتين اللانهائيتين

وحيث ان أى زوج من المستقيمات المتعامدة المارة ببورة قطاع مخروطى هما خطان متزاوجان وان هذه الازواج من المستقيمات المتزاوجة تكون تضامنا فيه المماسان التخيليان من البورة هما الخطان المضاعفان

فينتج أن المماســين التخيليين لأى قطاع مخروطى من بورة من بوره هما موازيان للخطين التقريبيين التخيليين لأى دائرة أى أن المماسين لأى قطاع مخروطى المرسومين من بورة من بوره يمران بالنقطتين الدائريتين اللانهائيتين

وحينئذ لجميع القطاعات المخروطيــة التى لهــا بو رة مشــتركة لها مماسان تخيليان مشــتركان ماران بهذه البورة وجميع القطاعات المخروطية المشــتركة فى البورتين لهــا أربعة مماسات تخيلية مشتركة

١٥٧ ـ قد بينا كيفية انشاء منحنى القطاع المخروطى الذى يمر بخمس نقط معلومة أو يمس خمســـة مستقيمات معلومة ومن المهم درس الاحوال الاخرى الآتية

(مسألة ١) كيفية رسم منحنى قطــاع مخروطى يمر بأربع نقط معــلومة ويمس مستقيما معلوما

لنفرض أن المستقيم المعلوم يقطع زوجين من الاضلاع المتقابلة فى الشكل الرباعى المكون من النقط الاربعة المعلومة فى ا ، اَ وفى ب ، بَ

فبمقتضى نظرية دسارج تكون جميع منحنيات القطاعات المخروطيــة المــارة بالنقط الاربعة المعــلومة مقطوعة فى أزواج من النقط المتزاوجة فى التضامن الذى يعينه الزوجان ا ، اَ ، ب ، بَ

وحينئذ اذا فرض أن منحنى قطاع مخروطى مار بالاربع النقط المعــلومة يمس المستقيم المعلوم فان نقطة التماس يلزم أن تكون احدى النقط المضاعفة لهذا التضامن وحينئذ فيوجد منحنيان (إما حقيقيان أو تخيليان) يمران بأربع نقط معلومة ويمسان مستقيما معلوما

وحيث معلوم خمس نقط على كل منهما فيمكن اتمام الرسم كما فى بند ١٤٤

(مسألة ٢) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمس أربعة مستقيمات معلومة ويمر بنقطة معلومة

يمكن ايجاد المماس فى النقطة المعلومة بواسطة عكس نظرية دسارج (بند ١٥١)

(مسألة ٣) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بثلاث نقط معلومة ويمس مستقيمين معلومين

لنفرض أن ا ب ، ا حـ هما المستقيمان المعلومان وأن ء ، هـ ، ف هى النقط المعلومة

ونفرض أن منحنى قطاع مخروطى أيا كان مارًا بنقطتى ء ، هـ يمس ا ب ، ا حـ فى ل ، م على التناظر وأن ء هـ يقطع ل م فى ع ويقطع ا ب ، ا حـ فى نقطتى بَ ، حـَ على التناظر

فيكون المستقيمان ا ب ، ا حـ والمستقيم والخط المضاعف ل م ع والمنحنى المار بنقطتى ء ، هـ عبارة عن ثلاث منحنيات مارة بالاربع النقط المذكورة وهى نقطتان منطبقتان على كل من النقطتين ل ، م

وحينئذ فهذه المنحنيات يقطعها المستقيم ء هـ فى تضامن واذا فنقطة ع هى احدى النقطتين المضاعفتين للتضامن الذى يعينه الزوجان (ء ، هـ) ، (بَ ، حـَ)

وحينئذ فوتر التماس للماسين ا ب ، ا حـ يمر باحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم ء هـ وكذلك يمر باحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم ء ف

وحينئذ فوتر التماس هو أحد أربعة مستقيمات ثابتة فاذا فرض أن أحد هذه المستقيمات يقطع ا ب ، ا حـ فى نقطتى و ، ى فانه يوجد منحن

واحد فقط مناظر له ومار بالنقط الخمسة ء ، هـ ، ف ، و ، ى ويمكن رسم هذا المنحنى كما فى بند ١٤٤ أو بند ١٥٣

وحينئذ فيمكن رسم أربعة منحنيات تمر بثلاث نقط معلومة وتمس مستقيمين معلومين

(مسألة ٤) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى يمر بنقطتين معلومتين ويمس ثلاثة مستقيمات معلومة

لنفرض ا ب حـ المثلث المكوّن من المماسات الثلاثة المعلومة وأن ء ، هـ هما النقطتان المعلومتان

فكما تقدم فى مسألة ٣ يكون وتر التماس للماسين المارين بنقطة ا مارا باحدى نقطتين ثابتتين على المستقيم ء هـ مثل النقطتين سـ ، سـَ

فاذا كان ا و هو المحور القطبي لنقطة سـ بالنسبة للمنحنى يكون
ا {سـ هـ و ء} = -١ وحينئذ فيمكن رسم ا و وكذلك يمكن رسم ا وَ الذى هو المحور القطبي لنقطة سـَ واذا فنقطة ك التى هى قطب المستقيم ء هـ واقعة على أحد مستقيمين ثابتين مارين بنقطة ا وكذلك تكون ك واقعة على أحد مستقيمين ثابتين مارين بنقطة ب واذا فنقطة ك هى احدى نقط أربعة ثابتة ومتى علمت ك يكون ك ء ، ك هـ هما المماسان المتناظران للمنحنى وبذلك يتعين المنحنى تماما حيث علم خمسة مماسات له

واذا فيمكن رسم أربعة منحنيات تمر بنقطتين معلومتين وتمس ثلاثة مستقيمات معلومة

(مسألة ٥) كيفية رسم منحنى قطاع مخروطى اذا علمت المحاور القطبية لثلاث نقط معلومة بالنسبة لهذا المنحنى

لنفرض ان ب حـ ، حـ ا ، ا ب هى المحاور القطبية الثلاثة للنقط اَ ، بَ ، حـَ على التناظر .

فاذا فرض ان ك هى نقطة تقاطع مستقيمين مارين بالنقطتين بَ ، حـَ وموازيين للخطين ا ب ، حـ ا على التناظر يكون مركز المنحنى واقعا على المستقيم ا ك واذا فرض ان ل هى نقطة تقاطع مستقيمين مارين بالنقطتين اَ ، حـَ موازيين للخطين ا ب ، ب حـ على التناظر يكون مركز المنحنى واقعا على المستقيم ب ل واذا تعين المركز ك للمنحنى

ولنفرض أن كاَ ، كبَ ، كحـَ تقطع ب حـ ، حـ ا ، ا ب فى ع ، ن ، ر على التناظر فاذا فرض أن اَ ، ع واقعتان فى جهة واحدة بالنسبة لنقطة ك وأن نقطة و فى وضع بحيث يكون ك و² = ك اَ × ك ع فان المستقيم المرسوم من و موازيا للمستقيم ب حـ يكون مماسا للمنحنى وبناء عليه اذا كان المنحنى قطعا ناقصا يمكن ايجاد المماسات فى ثلاث نقط واذا فرض أن المماس فى نقطة و يقطعه المستقيم ك بَ والمستقيم المرسوم من نقطة ك موازيا للمستقيم حـ ا فى نقطتى ط ، طَ على التناظر يكون المستطيل ط و . و طَ مساويا لمربع نصف القطر المزاوج للمستقيم ك و واذا فقد تعين زوج من القطرين المتزاوجين فى القطع الناقص وضعا وطولا فيكن اتمام الرسم كما فى بند ٧٥ واذا كان المنحنى قطعا زائدا فان الخطين التقربيين هما الخطان المضاعفان للحزمة المتضامنة التى أحد أزواجها المتقارنة هما المستقيم ك اَ والمستقيم المرسوم من ك موازيا للمستقيم ب حـ والزوج الثانى هما المستقيم ك بَ و المستقيم المرسوم من ك موازيا للمستقيم حـ ا فاذا علم الخطان التقربيان وعلم قطب مستقيم معلوم يمكن تميم رسم المنحنى

١٥٨ . – النسبة بين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من نقطة أيا كانت من منحنى قطاع مخروطى على ضلعين متقابلين من أضلاع شكل رباعى مرسوم فى المنحنى وبين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من هذه النقطة على الضلعين المتقابلين الاخريين هى ثابتة [نظرية پاپس]

لنفرض ا ، ب ، ح ، ء أربع نقط معلومة على منحنى قطاع مخروطى ونفرض ك نقطة أخرى على المنحنى أيا كانت ونفرض أن $ك^{ا}_{١}$ ، $ك^{ب}_{١}$ ، $ك^{ح}_{١}$ ، $ك^{ء}_{١}$ هى الأعمدة النازلة من ك على ا ب ، ب ح ، ح ء ، ء ا على التناظر . فعلينا الآن أن نثبت ان النسبة $ك^{ا}_{١}$ × $ك^{ح}_{١}$: $ك^{ب}_{١}$ × $ك^{ء}_{١}$ ثابتة لجميع أوضاع ك على المنحنى

فلنفرض أن ك ب ، ك ء يقطعان ا ح فى نقطتى و ، هـ على التناظر

فيكون ك $\{ا ب ح ء\}_{١}$ = $\{ا و ح هـ\}_{١}$ = ا و . هـ ح : و ح . ا هـ

وواضح ان ا و : و ح = ∆ ك ا ب : ∆ ك ب ح = $ك^{ا}_{١}$. ا ب : $ك^{ب}_{١}$. ب ح

، هـ ح : ا هـ = ∆ ء ح ك : ∆ ك ا ء = $ك^{ح}_{١}$. ح ء : $ك^{ء}_{١}$. ء ا

وحيث ان ك $\{ا ب ح ء\}_{١}$ ثابت لجميع أوضاع نقطة ك على المنحنى فينتج ان $ك^{ا}_{١}$. $ك^{ح}_{١}$: $ك^{ب}_{١}$. $ك^{ء}_{١}$ ثابت

مسائل

(١) اذا علمت خمس نقط على منحنى قطاع مخروطى فالمطلوب بيان كيفية ايجاد نقط أخرى على هذا المنحنى

(٢) اذا علمت خمسة مماسات لمنحنى قطاع مخروطى فالمطلوب بيان كيفية ايجاد مماسات أخرى لهذا المنحنى

(٣) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية المركز وثلاث نقط

(٤) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية المركز وثلاثة مماسات

(٥) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية نقطتين عليه ومثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لهذا المنحنى

(٦) المطلوب رسم منحنى قطاع مخروطى مع معلومية مماسين ومثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لهذا المنحنى

(٧) المطلوب ايجاد مركز قطع زائد قائم يمس أربعة مستقيمات معلومة

(٨) اذا علمت جملة قطاعات زائدة قائمة وعلم مثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة للمنحنيات المذكورة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز هذه القطاعات الزائدة القائمة هو الدائرة المرسومة على المثلث المذكور

(٩) اذا رسم منحنى قطاع مخروطى فى المثلث ا ب حـ ومس الضلع ب حـ فى نقطة ف فالمطلوب البرهنة على أن مركز المنحنى واقع على المستقيم الواصل بين منتصفى ب حـ ، ا ف

(١٠) اذا فرض أن ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط أيا كانت على منحنى قطع زائد وان حـ ك الموازى لأحد الخطين التقربيين يقطع ا ء فى نقطة ك وأن ء ل الموازى للخط التقربى الآخر يقطع حـ ب فى نقطة ل فالمطلوب البرهنة على أن ك ل مواز للمستقيم ا ب

(١١) المطلوب البرهنة على أن الستين خطا البسكالية المناظرة لست نقط على منحنى قطاع مخروطى تتقاطع ثلاثا ثلاثا

(١٢) اذا فرض أن أقطاب الاضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هى اَ ، بَ ، حـَ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ تتقابل فى نقطة واحدة وان نقط تقاطع ب حـ مع بَ حـَ ، حـ ا مع حـَ اَ ، ا ب مع اَ بَ واقعة على خط مستقيم واحد

(١٣) المطلوب ايجاد نقط تقاطع مستقيم معلوم بمنحنى قطاع مخروطى تعينه خمس نقط معلومة وذلك بطريقة هندسية

(١٤) المطلوب رسم مماسات بطريقة هندسية من نقطة معلومة لمنحنى القطاع المخروطى الذى تعينه خمسة مماسات معلومة

(١٥) اذا رسم من نقطة ثابتة على منحنى قطاع مخروطى مستقيم يقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل نقطة ع ويقطع أضلاع مثلث معلوم مرسوم فى المنحنى فى ا َ ، ب َ ، حـ َ على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن {ع ا َ ب َ حـ َ} ثابت

(١٦) اذا فرضت نقطة ما مثل نقطة م على مماس ثابت لمنحنى قطاع مخروطى وفرض أن م ن هو المماس الثانى للمنحنى من نقطة م وكانت ا ب حـ رؤوس مثلث أيا كان مرسوم على المنحنى المذكور فالمطلوب البرهنة على أن م {ا ب حـ ن} ثابت لجميع أوضاع نقطة م

(١٧) اذا فرض أن ع ، ن نقطتان متزاوجتان بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى وأن ع واقعة على مستقيم ثابت وان ن ع يقابل زاوية قائمة رأسها نقطة ثابتة فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطاع مخروطى مار بالنقطة الثابتة

(١٨) اذا فرض أنه من نقطة ثابتة مثل نقطة م على أحد الاقطار الثلاثة لشكل رباعى تام رسمت مماسات لمنحنيات القطاعات المخروطية المرسومة فى الشكل الرباعى المذكور فالمطلوب البرهنة على أن نقط التماس واقعة على منحنى قطاع مخروطى مار بنهايات القطرين الآخرين وقاسم للقطر الذى عليه نقطة م بنسبة توافقية

(١٩) اذا فرض أن مستقيما يقطع دائرتين معلومتين فى نقط متزاوجة تزاوجا توافقيا فالمطلوب البرهنة على أن هذا المستقيم يغلف منحنى قطاع مخروطى بورتاه مركزا الدائرتين

(٢٠) المطلوب بيان كيفية رسم شكل كثير الأضلاع يمر كل ضلع من أضلاعه بنقطة ثابتة وتقطع كل رأس من رؤوسه على مستقيم معلوم

(٢١) اذا فرض أن ثلاثة منحنيات قطاعات مخروطية تمر بأربع نقط مشتركة فالمطلوب البرهنة على أن المماس المشترك بين منحنيين منهما يقسمه المنحنى الثالث بنسبة توافقية

(٢٢) اذا فرضت أربعة مستقيمات كل منها مماس لثلاثة قطاعات مخروطية معلومة فالمطلوب البرهنة على أن المستقيمات المماسة لاثنين منها فى نقطة مشتركة والمماسين المرسومين من هذه النقطة للمنحنى الثالث تكوّن حزمة توافقية

(٢٣) اذا فرض أن قطعا زائدا يمر بمركز منحنى قطاع مخروطى وأن خطيه التقربيين موازيان لقطرين متزاوجين من أقطار المنحنى المذكور فالمطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم مثلثات عددها لانهائى فى القطع الزائد المذكور بحيث تكون رؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى

(٢٤) اذا فرض أن ا ب حـ ى هـ ف شكل سداسى أيا كان مرسوم فى منحنى قطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن النسبة بين حاصل الضرب المتواصل للاعمدة النازلة من نقطة ما من المنحنى على الأضلاع ا ب ، حـ ى ، هـ ف و بين حاصل الضرب المتواصل للاعمدة النازلة من النقطة المذكورة على الاضلاع المتبادلة مع الأولى وهى ب حـ ، ى هـ ، ف ا هى ثابتة

(٢٥) اذا فرض أن منحنى قطاع مخروطى يمس المستقيمات الأربعة ا ب ، ب حـ ، حـ ء ، ء ا وأن مماسا آخر يقطع ا ء ، ب حـ فى ع ، ں على التناظر فالمطلوب البرهنة على أن ا ع : ع ء ، ب ں : حـ ں بينهما نسبة ثابتة ثم البرهنة بناء على ذلك أو بأى طريق آخر على أن النسبة بين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من ا ، حـ على أى مماس آخر لهذا المنحنى وبين المستطيل المكوّن من العمودين النازلين من ب ، ء على هذا المماس هى ثابتة

(٢٦) اذا فرض أن ں نقطة أيا كانت على مستقيم معلوم ، ر نقطة تقاطع المحورين القطبيين لنقطة ں بالنسبة لمنحنيى قطاعين مخروطيين معلومين فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ر لجميع أوضاع ں هو منحنى قطاع مخروطى

(٢٧) اذا رسم مستقيم أيا كان من نقطة معلومة مثل نقطة م وفرض أن ں ، ںَ قطبا هذا المستقيم بالنسبة لمنحنيى قطاعين مخروطين معلومين فالمطلوب البرهنة على أن غلاف ں ںَ للمستقيمات المختلفة المارة بنقطة م هو قطاع مخروطى

(٢٨) اذا فرض أنه من نقطتين أيا كانا مثل ط ، طَ رسم المماسان ط ع ، ط ں والمماسان طَ عَ ، طَ ںَ لمنحنى قطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن النقط الستة ط ، طَ ، ع ، عَ ، ں ، ںَ واقعة على منحنى قطاع مخروطى آخر

(٢٩) المطلوب البرهنة على أن الدائرة المرسومة على مثلث رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى تقطع دائرة الاستدلال لهذا المنحنى بالتعامد

(٣٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز منحنيات القطاعات المخروطية المرسومة فى مثلث والتى لها دوائر استدلال ذات نصف قطر معلوم هو محيط دائرة

(٣١) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمراكز القطاعات الزائدة القائمة التى تمس أضلاع مثلث هو الدائرة القطبية لهذا المثلث

(٣٢) المطلوب البرهنة على أن دوائر الاستدلال لجميع منحنيات القطاعات المخروطية التى تمس أضلاع مثلث تقطع الدائرة القطبية لهذا المثلث بالتعامد

المسقط المخروطى

١٥٩ – اذا وصلنا نقطة ما كنقطة ع بنقطة ثابتة مثل نقطة ف وقطعنا ف ع بأى مستو ثابت فى نقطة مثل عَ فان عَ تسمى مسقط ع على هذا المستوى وتسمى نقطة ف رأس المسقط أو مركز المسقط ويسمى المستوى القاطع مستوى المسقط

١٦٠ – مسقط أى خط مستقيم خط مستقيم

وذلك لأن المستقيمات الواصلة بين نقطة ف وجميع نقط أى خط مستقيم جميعها فى مستو واحد وهذا المستوى يقطعه مستوى المسقط فى خط مستقيم

١٦١ – مسقط أى منحن مستو هو منحن من الدرجة عينها

وذلك لأنه اذا فرض أن مستقيما أيا كان يقطع المنحنى الاصلى فى جملة نقط مثل ا ، ب ، حـ ، ء .... فان مسقط المستقيم يقطع مسقط المنحنى فى نقط تقاطع ف ا ، ف ب ، ف حـ ، ف ء بمستوى المسقط وحينئذ فعدد النقط فى أحد المنحنيين التى على مستقيم واحد يساوى عدد النقط التى على مستقيم واحد فى المنحنى الثانى وبذلك تثبت النظرية

١٦٢ - مسقط مماس المنحنى هو مماس مسقط المنحنى

لأنه اذا فرض أن مستقيما يقطع منحنيا فى نقطتين ا ، ب فان مسقط هذا المستقيم يقطع مسقط المنحنى فى نقطتين مثل ا١ ، ب١ وهما نقطتا تقاطع ف ا ، ف ب بمستوى المسقط فاذا فرض أن ا انطبقت على نقطة ب تنطبق كذلك ا١ على ب١

١٦٣ - الارتباط بين القطب والمحور القطبي بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هو بعينه فى المسقط

وذلك واضح من البندين السابقين

وواضح أيضا أن مسقط النقطتين المتزاوجتين أو المستقيمين المتزاوجين بالنسبة لمنحنى قطاع مخروطى هما نقطتان متزاوجتان أو مستقيمان متزاوجان بالنسبة لمسقط المنحنى

١٦٤ - اذا رسم مستو مارّ بالرأس ومواز لمستوى المسقط وفرض أنه يقطع المستوى الاصلى فى المستقيم كَ لَ فانه يحدث من توازى المستوى ف كَ لَ ومستوى المسقط أن خط تقاطعهما وهو مسقط المستقيم كَ لَ يكون على بعد لانهائى

وحينئذ فاذا أردنا اسقاط أى مستقيم مثل كَ لَ على بعد لانهائى نعتبر نقطة أيا كانت مثل ف رأسا ونعتبر مستويا موازيا للمستوى ف كَ لَ مستوى المسقط

فيكون مسقط المستقيات التى تتقاطع فى نقطة على المستقيم كَ لَ مستقيات موازية لها لأن مسقط نقطة تقاطعها هو نقطه على بعد الى مالانهايه

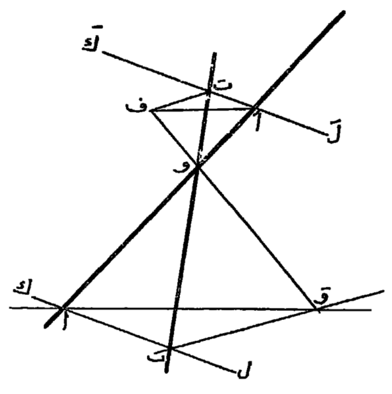
١٦٥ ـ مسقط جملة خطوط مستقيمة متوازية فى المستوى الاصلى هو خطوط مستقيمة متقاطعة فى نقطة

للبرهنة على ذلك نفرض أن ف ع هو المستقيم المرسوم من الرأس موازيا للستقيمات المفروضة ، ع نقطة واقعة على مستوى المسقط بحيث ان ف ع موجودة فى المستوى المار بنقطة ف وبخط من الخطوط المتوازية فيكون مسقط كل خط من الخطوط المتوازية مارًا بنقطة ع

وتتغير نقطة ع باختلاف مجموعات الخطوط المتوازية ولكن حيث ان ف ع مواز على الدوام للستوى الاصلى فتكون نقطة ع واقعة على الدوام على خط تقاطع مستوى المسقط بمستو مار بالرأس ومواز للستوى الاصلى وحينئذ فسقط جملة خطوط متوازية فى المستوى الاصلى هو خطوط متقاطعة فى نقطة واحدة وجميع هذه النقط واقعة على خط مستقيم للجموعات المختلفة من الخطوط المتوازية

١٦٦ ـ لنفرض أن ك ل هو خط تقاطع المستوى الاصلى بمستوى المسقط ونرسم من الرأس مستويا موازيا لمستوى المسقط ونفرض أنه يقطع المستوى الاصلى فى المستقيم كَ لَ ثم نفرض أن المستقيمين ا و اَ ، ب و بَ يقطعان المستقيمين ك ل ، كَ لَ فى النقطتين ا ، ب والنقطتين اَ ، بَ على التناظر وأن ف و يقطع مستوى المسقط فى وَ فيكون ا وَ ، ب وَ مسقطى ا و اَ ، ب و بَ

وحيث ان المستويين ف اَ بَ ، ا وَ ب متوازيان ومن المعلوم أن المستويين المتوازيين يقطعهما مستو واحد فى خطين متوازيين فيكون المستقيمان ف اَ ، ف بَ موازيين للستقيمين ا وَ ، ب وَ على التناظر



وحينئـذ فالزاوية اَ ف تَ تسـاوى الزاوية ا وَ ب أى أن اَ ف تَ تسـاوى مسقط الزاوية ا و ب

وكذلك اذا فرض أن المستقيمين حـ د ، هـ د يقطعان كَ لَ فى حـَ ، دَ على التناظر تكون الزاوية حـَ ف دَ مساوية لمسقط الزاوية حـ د هـ

ونستنتج ممـا تقدم النظرية الاساسية الآتية فى المساقط وهى

كل خط مستقيم يمكن اسقاطه الى مالا نهاية وفى الوقت عينه يمكن اسقاط أى زاويتين بحيث يكون المسقط زاويتين معلومتين لأنه اذا فرض أن المستقيمات المكونة للزاويتين تقطع المسـتقيم الذى يراد اسـقاطه الى مالا نهاية فى النقطتين اَ ، تَ والنقطتين حـَ ، دَ ثم رسمنا مستويا أيا كان مارًا بالنقط اَ تَ حـَ دَ ورسمنا فى هـذا المستوى قطعتين دائريتين مارتين بالنقطتين اَ ، تَ والنقطتين حـَ ، دَ على التناظر ومشتملتين على زاويتين مساويتين للزاويتين المعلومتين فنعتبر احدى نقطتى التقاطع للقطعتين

المذكورتين مركزا للاسقاط ولا بد ان يكون مستوى المسقط موازيا للمستوى الذى رسمناه مارا بالنقط اَ بَ حَ ىَ
واذا لم تتقابل القطعتان يكون مركز المسقط تخيليا

(مسألة ١) كيفية اثبات أنه يمكن أن يكون مسقط أى شكل رباعى مربعا ليكن ا ح ح ى هو الشكل الرباعى المعلوم وأن ع ، ى (أنظر الشكل الاخير من بند ١٣٨) هما نقطتا تقاطع كل ضلعين متقابلين من أضلاعه وأن القطرين ح ى ، ا ح يقطعان المستقيم ع ى فى النقطتين ب ، ر فاذا أسقطنا ع ى اسقاطا لانهائيا وأسقطنا فى الوقت نفسه الزاويتين ع ى ى ، ر و ب على زاويتين قائمتين فان مسقط الشكل الرباعى يلزم أن يكون مربعا لأنه حيث ان مسقط ع ى الى مالا نهاية يكون كل ضلعين متقابلين من المسقط متوازيين ويكون المسقط اذا متوازى أضلاع

وكذلك علم أن احدى زوايا متوازى الاضلاع قائمة والزاوية المحصورة بين قطريه قائمة أيضا وحينئذ فالمسقط مربع

(مسألة ٢) كيفية اثبات أن المثلث المكوّن من أقطار الشكل الرباعى رؤوسه أقطاب أضلاعه بالنسبة لأى منحنى قطاع مخروطى يمس أضلاع الشكل الرباعى

لذلك نسقط الشكل الرباعى على مربع فتكون الدائرة المرسومة على المربع هى دائرة الاستدلال للمنحنى المذكور وحينئذ فنقطة تقاطع قطرى المربع هى مركز المنحنى

وحيث أنّ المحور القطبى للمركز هو المستقيم الموضوع على بعد لانهائى فيكون المحور القطبى لنقطة تقاطع قطرين من الأقطار الثلاثة هو القطر الثالث

(مسألة ٣) المطلوب البرهنة على أنه اذا رسم منحنى قطاع مخروطى فى شكل رباعى فان المستقيم الواصل بين نقطتين من نقط التماس يمر بأحد رؤس المثلث المكون من اقطار الشكل الرباعى

(مسألة ٤) اذا فرض ان ا ب حـ مثلث مرسوم على قطع مكافىء ثم كملت متوازيات الاضلاع ا ب اَ حـ ، ب حـ بَ ا ، حـ ا حـَ ب فالمطلوب البرهنة على أن اوتار التماس تمر بالنقط اَ ، بَ ، حـَ على التناظر

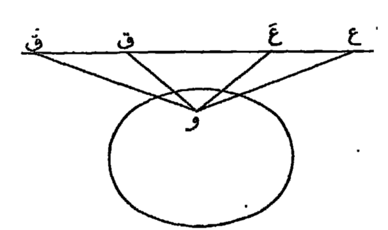
هذه هى حالة خصوصية لمسألة ٣ و فيها أحد أضلاع الشكل الرباعى هو المستقيم الذى على بعد لانهائى

(مسألة ٥) اذا فرض أن المستقيمات الثلاثة الواصلة بين رؤس مثلثين تتقابل فى نقطة واحدة فالمطلوب البرهنة على أن النقط الثلاثة التى يتقاطع فيها كل ضلعين متناظرين واقعة على مستقيم واحد

لانه اذا أسقطت نقطتان من نقط تقاطع الاضلاع المتناظرة على بعد الى ما لانهاية يكون زوجان من الاضلاع المتناظرة متوازيين ومن السهل البرهنة على أن الضلعين الباقيين متوازيان أيضا

(مسألة ٦) يمكن اسقاط أى قطاعين مخروطيين على قطاعين مخروطيين متحدى المركز [أنظر بند ١٤٩ مسألة ٢]

١٦٧ — يمكن اسقاط أى قطاع مخروطى على دائرة مركزها مسقط أى نقطة معلومة



لنفرض ان و هى النقطة التى يراد أن يكون مسقطها مركزا لمنحنى المسقط ونفرض ع نقطة ما على المحور القطبى لنقطة و ، و ن المحور القطبى لنقطة ع فيكون و ع ، و ن مستقيمين متزاوجين

ثم نفرض و عَ ، و نَ مستقيمين متزاوجين آخرين ونأخذ مستقيمين متزاوجين آخرين وليكونا و عً ، و نً

ثم نسقط المحور القطبى لنقطة و على بعد الى ما لا نهاية ونسقط الزاويتين ع و ن ، عَ و نَ على زاويتين قائمتين فينشأ اذا منحنى قطاع مخروطى مركزه مسقط نقطة و وحيث ان زوجين من الاقطار المتزاوجة متعامدان فيكون هذا المنحنى دائرة

١٦٨ ــ خواص الشكل الثابتة لكل مسقط من مساقطه تسمى بالخواص المسقطية وعلى العموم لا تشمل هذه الخواص المسقطية المقادير الا انه قد توجد بعض خواص مسقطية مشتملة على مقادير المستقيمات والزوايا وأشهرها الخاصة الآتية

النسبة التعاكسية للحزم والصفوف لا تتغير بالاسقاط

لنفرض ا ، ب ، حـ ، ى أربع نقط على خط مستقيم ، اَ ، بَ ، حـَ ، ىَ مساقطها فاذا كانت ف مركز المسقط يكون ف ا اَ ، ف ب بَ ، ف حـ حـَ ، ف ى ىَ خطوطا مستقيمة ويحدث [بمقتضى بند ١٣٨]

{ ا ب حـ ى } = ف { ا ب حـ ى } = { اَ بَ حـَ ىَ }

واذا فرضت حزمة مكوّنة من أربع مستقيمات متقابلة فى نقطة مثل و وفرض أن قاطعا قطع الحزمة فى ا ، ب ، ح ، ء يحدث

و {ا ب ح ء} = {ا ب ح ء} = ف {ا ب ح ء} = {اَ بَ حَ ءَ} = وَ {اَ بَ حَ ءَ}

وينتج مما تقدّم ومن بند ١٤١ أنه اذا كانت جملة نقط مكونة لتضامن تكون مساقطها مكوّنة لتضامن أيضا

(مسألة ١) المطلوب البرهنة على أن أى وتر من أوتار منحنى قطاع مخروطى مار بنقطة مثل و يقسمه المنحنى والمحور القطبى لنقطة و بنسبة توافقية

لذلك نسقط المحور القطبى لنقطة و اسقاطا لانهائيا فتكون و مركز المسقط واذا تكون متصف الوتر ويكون {ع و ن ∞} مكوّنا لنسبة توافقية متى كان ع و = و ن

(مسألة ٢) المطلوب البرهنة على أن منحنيات القطاعات المخروطية المارة بأربع نقط ثابتة يقطعها أى مستقيم فى أزواج من نقط متضامنة [نظرية ديسارج]

لأنه اذا أسقطت نقطتان من هذه النقط على نقطتين دائريتين لانهائيتين يكون مسقط هذه المنحنيات دوائر مشتركة فى المحور وبذلك تتضح صحة النظرية

(مسألة ٣) اذا فرض أن ا واَ ، ب وبَ ، ح وحَ ، ء وءَ ، ... أوتار منحنى قطاع مخروطى فالمطلوب البرهنة على أن النقط ا ، ب ، ح ، ء ، ... والنقط اَ ، بَ ، حَ ، ءَ ، ...... تقابل حزما متناظرة رأسها نقطة ما من نقط المنحنى

للبرهنة على ذلك نسقط المنحنى على دائرة مركزها نقطة و

(مسألة ٤) اذا فرضت مجموعتان من النقط على منحنى قطاع مخروطى وفرض أنها تقابل حزمتين متناظرتين رأسهما فى نقطة ما على المنحنى فالمطلوب البرهنة على أن الخطوط الواصلة بين النقط المتناظرة فى المجموعتين تغلف قطاعا مخروطيا مماسا للمنحنى الأول فى نقطتين

لنفرض أن ا ، ب ، حـ ، ء ، ... ، اَ ، بَ ، حـَ ، ءَ ، ... مجموعتان من النقط

ولنفرض أن ا بَ يقطع اَ ب فى ك وأن ا حـَ يقطع اَ حـ فى ل ثم نسقط المنحنى على دائرة بحيث يسقط ك ل الى مالا نهاية فمن السهل أن يرى أن مساقط ا اَ ، ب بَ ، حـ حـَ تكون أوتارا متساوية فى هذه الدائرة

وحينئذ فالزاويتان المقابلتان للستقيمين ا ب ، ب حـ ورأسهما نقطة ما على محيط الدائرة تساويان الزاويتين المقابلتين للستقيمين اَ بَ ، بَ حـَ على التناظر

واذا فرضت ع ، عَ أى نقطتين أخريين متناظرتين وفرضت و نقطة ما على الدائرة فبما أن و { ا ب حـ ع } = و { اَ بَ حـَ عَ } ينتج أن الزاويتين حـ و ع ، حـَ و عَ متساويتان وأن

ع عَ = حـ حـَ = ب بَ = ا اَ

وحينئذ فغلاف المستقيم ع عَ دائرة متحدة مع الاولى فى المركز

(مسألة ٥) المطلوب رسم مثلث فى منحنى قطاع مخروطى بحيث يكون كل ضلع من أضلاعه مارا بنقطة ثابتة معلومة

لنفرض ع ، ن ، م النقط الثلاثة الثابتة التى تمر بها أضلاع المثلث ثم نرسم من نقطة ع وترا ما مثل بَ حـَ ونفرض أن حـَ ن يقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل اَ وأن اَ م يقطع المنحنى فى نقطة أخرى مثل ءَ

ثم نأخذ أى نقطتين أخريين على المنحنى مثـل ت″ ، تً ونبحث عن النقطتين المتناظرتين لها وليكونا ى″ ، ىً

ونفرض سـ احدى النقطتين اللتين على المنحنى والمكونتين للارتباط الآتى

و { تَ ت″ تً سـ } = و { ىَ ى″ ىً سـ }

بفرض أن و نقطة ما على المنحنى (أنظر بند ١٥٥ مسألة ٤) فاذا فرض أن سـ ع يقطع المنحنى فى نقطة ثانية مثل ص وأن ص ں يقطع المنحنى فى ر يكون ر سـ مارا بنقطة م ويكون سـ ص ر أحد المثلثين الحقيقيين أو التخيليين اللذين يوفيان بالشروط المطلوبة

مسائـــــل

(١) المطلوب البرهنة على أنه يمكن رسم أربعة قطاعات مخروطية لهابورة مشتركة ومارّة بثلاث نقط معلومة وأن الوتر البورى العمودى لأحد هذه المنحنيات يساوى مجموع الأوتار البورية العمودية للمنحنيات الثلاثة الاخرى

(٢) اذا فرض أن قطعين مكافئين يمسان أضـــلاع مثلث معـلوم وكانا متقاطعين بالتعامد فى نقطة ع فالمطلوب البرهنة على أن نقطة ع يلزم أن تكون واقعة على الدائرة المرسومة على المثلث المعلوم

(٣) اذا رسم أى مستقيم من نقطة ثابتة مثـــل و ليقطع منحنى قطاع مخروطى معلوم فى نقطتى ع ، ں وفرضت نقطة م على هذا المستقيم بحيث يكون { و ع ں م } ثابتا فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهنـدسى لنقطة م هو منحنى قطاع مخروطى ممـاس للمنحنى المعلوم فى نقطتين

(٤) المطلوب البرهنة على أن دائرتين والدائرة التى قطرها المستقيم الواصل بين مركزى تشابههما يقطعها أى مستقيم فى تضامن

(٥) اذا فرض أن ع ، عَ نقطتان متناظرتان فى صفين متناظرين على المستقيمين الثابتين و ا ، و اَ على التناظر وتم رسم متوازى الاضلاع ع و عَ ن فالمطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لنقطة ن هو منحنى قطاع مخروطى

(٦) المطلوب البرهنة على أن أى منحنى قطاع مخروطى مار بالنقط الثلاث الثابتة ا ، ب ، حـ والموضوع بحيث تكون نقطتان أخريان معلومتان متزاوجتين بالنسبة له يمر بنقطة ثابتة أخرى

(٧) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى لمركز منحنى قطاع مخروطى مار بالنقطتين الثابتتين ا ، ب وله زوجان معلومان من النقط المتزاوجة أيضا هو منحنى قطاع مخروطى

(٨) اذا فرض أن منحنى قطاع مخروطى مرسوم على مثلث وأن دائرة استدلاله مارة بملتقى أعمدة المثلث فالمطلوب البرهنة على أن المحور القطبى لملتقى الأعمدة بالنسبة لهذا المنحنى يمس الدائرة القطبية لهذا المثلث

(٩) اذا رسم منحنى قطاع مخروطى ليمر بالنقط الأربعة التى يتقاطع فيها منحنيا قطاعين مخروطيين معلومين ويمر بنقطة تقاطع مماسين مشتركين فالمطلوب البرهنة على أنه يمر أيضا بنقطة تقاطع المماسين الآخرين المشتركين

(١٠) المطلوب البرهنة على أن المحل الهندسى للرأس التى يمكن أن تسقط منها مجموعة أربع نقط ثابتة فى مستو على مربع هو دائرة فى مستو عمود على القطر الثالث للشكل الرباعى المكون من النقط الأربعة المذكورة

(١١) المطلوب البرهنة على أنه يمكن اسقاط أى مثلثين فى مستوى منظور على مثلثين متساويى الاضلاع

(١٢) اذا رسمت دائرة وقطع زائد قائم بحيث يكون مركز كل منهما واقعا على المنحنى الآخر ثم رسم قطع مكافئ بحيث تكون بورته هى مركز القطع الزائد ودليله مماسا للقطع الزائد فى مركز الدائرة فالمطلوب البرهنة على ان هنالك

عددا لانهائيا من المثلثات تكون فى آن واحد مرسومة فى أحد المنحنيات الثلاثة ومرسومة على منحن آخر منها ورؤوسها أقطاب أضلاعها بالنسبة للمنحنى الثالث مهما كان ترتيب المنحنيات

(١٣) المطلوب البرهنة على أن غلاف محاور منحنيات القطاعات المخروطية التى تمس مستقيمين معلومين فى نقط ثابتة هو قطع مكافئ

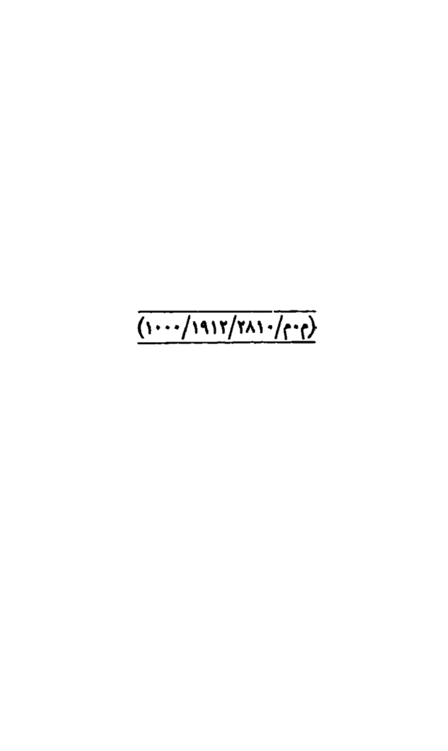
(١٤) المطلوب البرهنة على أنه اذا كان منحنى قطاع مخروطى مرسوم فى شكل رباعى هو محيط دائرة فان محورى أى منحن آخر فى الشكل الرباعى المذكور يغلفان قطعا مكافئا مماسا لأقطار الشكل الرباعى ودليله مار بمنتصفات الأقطار

(١٥) المطلوب البرهنة على أن الخطوط التقربية لجميع منحنيات القطاعات المخروطية التى تمس مستقيمين معلومين فى نقطتين معلومتين تغلف قطعا مكافئا

(١٦) اذا رسمت دائرة تمس منحنى قطع ناقص فى نقطة ثابتة ع وكانت المماسات المشتركة للدائرة والقطع الناقص التى لاتمر بنقطة ع متقاطعة فى نقطة ط فالمطلوب البرهنة على أن ط واقعة على القطع الزائد المار بنقطة ع والمشترك مع الأول فى البور

(١٧) اذا رسم منحنى قطاع مخروطى فى المثلث ا ب حـ ومار بمركز الدائرة المرسومة على المثلث المذكور فالمطلوب البرهنة على أن دائرة الاستدلال للمنحنى المذكور تمس الدائرة المرسومة على هذا المثلث وتمس دائرة النقط التسع للمثلث عينه

تم الجزء الثانى من كتاب الخواص الهندسية فى القطاعات المخروطية
والحمد لله أولا وآخرا
وصلى الله على سيدنا محمد النبي الامى وعلى آله وصحبه وسلم



(م٠م/٢٨١٠/١٩١٢/١٠٠٠)


Bibliotheca Alexandrina
0429458